UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 8

$\boxed{\textbf{57}}$ (a) Bis zu welcher Ordnung der Taylorpolynome von exp müssen wir gehen, wenn wir damit die Euler-Zahl e zumindest auf $\frac{1}{1000}$ genau berechnen wollen?
(b) Was ergeben die Taylorpolynome einer Polynomfunktion $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$?

Bestimmen Sie in den folgenden beiden Aufgaben die Konvergenzradien der Potenzreihen.

$\boxed{\textbf{58}}$ (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cosh(n)\, x^n$.

$\boxed{\textbf{59}}$ (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

$\boxed{\textbf{60}}$ Geben Sie eine alternative Herleitung der Reihenentwicklung von arctan, indem Sie zunächst die Funktion $g\colon\,]-1,1[\to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/(1+x^2)$, betrachten und die Summenformel einer geeigneten geometrischen Reihe anwenden.

$\boxed{\textbf{61}}$ Können Sie mit einem ähnlichen Trick wie in der vorigen Aufgabe eine Reihenentwicklung für arcsin im Bereich $|x| < 1$ herleiten? (Hinweis: Diesmal mit einer passenden Binomialreihe an Stelle der geometrischen Reihe.)

$\boxed{\textbf{62}}$ Beschreiben Sie im Detail, was der Satz von Taylor mit $n = 2$ bei Anwendung auf die Funktion $f\colon\,]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ ergibt. Benützen Sie das Resultat, um die Ungleichung in Aufgabe $\boxed{12}$(b) nun unabhängig nochmal abzuleiten. (Für den zweiten Teil ist es praktisch, die Fälle $-1 < x \leq 0$ und $0 < x < 1$ separat zu untersuchen.)

$\boxed{\textbf{63}}$ Bestimmen Sie folgenden Limes zunächst mittels Regel von de l'Hospital und dann noch einmal durch Einsatz von Potenzreihenentwicklungen: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$

$\boxed{\textbf{64}}$ Begründen Sie, warum $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$ für $|x| < 1$ gilt.