Übungen zu „Funktionalanalysis“ im SS 2021 (Günther Hörmann)

$\boxed{1}$ Sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum. Zeige, dass folgende Abbildungen stetig sind:

(a) Addition $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$, d.h. $x_n \to x$ und $y_n \to y$ impliziert $x_n + y_n \to x + y$,

(b) Multiplikation mit Skalaren $\mathbb{K} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$,
d.h. aus $\lambda_n \to \lambda$ (in $\mathbb{K}$) und $x_n \to x$ (in X) folgt $\lambda_n x_n \to \lambda x$,

(c) die Norm als Abbildung $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, d.h. $x_n \to x$ erzwingt $\|x_n\| \to \|x\|$.

$\boxed{2}$ Es sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum, $a \in X$ und $r > 0$. Zeige:

(a) $U_r(a)$ ist konvex, d.h. für $0 \leq \lambda \leq 1$ und $x, y \in U_r(a)$ gilt stets $\lambda x + (1 - \lambda) y \in U_r(a)$,

(b) $U_r(a) = a + rU_1(0)$ und $\overline{U_r(a)} = K_r(a)$.

$\boxed{3}$ Es sei $(X, \| \ \|)$ ein normierter Raum. Finden Sie oder verschaffen Sie sich einen Beweis für die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen (und tragen Sie diesen vor):

(i) X ist vollständig,

(ii) In X ist jede absolut konvergente Reihe konvergent, d.h. zu jeder Folge (a_n) in X mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty$ gibt es ein $z \in X$, sodass $z = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$ in X gilt.

$\boxed{4}$ Sei E der Vektorraum (bzgl. komponentenweiser Operationen) aller reellen Folgen mit nur endlich vielen Gliedern ungleich null. Zeige, dass E mit keiner der beiden hier angegebenen Normen vollständig ist:

(a) $\|x\|_{\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$, (b) $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. (Notation $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.)

$\boxed{5}$ Finden Sie oder verschaffen Sie sich einen Beweis für das sogenannte Lemma von Riesz: Wenn U ein echter und abgeschlossener Teilraum des normierten Raumes $(E, \| \ \|)$ ist, dann gibt es zu jedem $\eta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \eta < 1$ ein $x_\eta \in E$ mit $\|x_\eta\| = 1$, sodass

$$\forall u \in U: \quad \|u - x_\eta\| \geq \eta.$$

$\boxed{6}$ Seien $(X, \| \ \|_X)$ und $(Y, \| \ \|_Y)$ normierte Räume. Wir studieren hier das kartesische Produkt $X \times Y$ mit den komponentenweisen Vektrorraumoperationen[1] als normierten Raum. Zeige:

(a) Für $1 \leq p < \infty$ definiert $\|(x, y)\|_p := \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p}$ und für $p = \infty$ definiert $\|(x, y)\|_{\infty} := \max(\|x\|_X, \|y\|_Y)$ jeweils eine Norm auf $X \times Y$.

(b) Alle Normen aus (a) sind äquivalent und erzeugen (durch ihre jeweiligen Metriken) die Produkttopologie auf $X \times Y$.

[1] Dies wird oft auch als äußere direkte Summe $X \oplus Y$ bezeichnet.

$\boxed{\textbf{7}}$ Es sei $1 \le p < q \le \infty$. Zeige: (a) $l^p \subseteq l^q$ und (b) $l^p \ne l^q$.

$\boxed{\textbf{8}}$ Es sei $1 \le p < q \le \infty$. Zeige: (a) $L^q([0,1]) \subseteq L^p([0,1])$ und
(b) es gilt weder $L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^q(\mathbb{R})$ noch $L^q(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{9}}$ $C^1([0,1])$ bezeichne die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $[0,1] \to \mathbb{C}$.

(a) Gib Begründungen oder Beispiele dafür an, dass $C^1([0,1])$ als Teilraum des Banachraumes $(C([0,1]), \| \; \|_\infty)$ nicht abgeschlossen sein kann.

(b) Zeige, dass durch $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ auf $C^1([0,1])$ eine Norm definiert wird und $(C^1([0,1]), \| \; \|)$ ein Banachraum ist. (Auf passende Sätze aus der Analysis zurückführen, nicht alles „selbst stricken".)

$\boxed{\textbf{10}}$ Zeige, dass l^∞ nicht separabel ist.

$\boxed{\textbf{11}}$ Zeige, dass c_0 separabel ist. Gilt dies auch für c?

$\boxed{\textbf{12}}$ Wir betrachten den Quotientenraum l^∞ / c_0 mit der aus $\| \; \|_\infty$ entspringenden Norm $\| \; \|'$. Zeige, dass sich für $x = (x_n) \in l^\infty$ folgende Gleichung ergibt

$$\|x + c_0\|' = \limsup |x_n|.$$

(Erinnerung an die Analysis: Für jede beschränkte reelle Folge (a_n) strebt $\alpha_k := \sup_{k>n} a_n$ monoton fallend gegen $\limsup a_n$.)

$\boxed{\textbf{13}}$ Zeige: (a) Jede lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen normierten Raum in einen beliebigen normierten Raum ist stetig.

(b) Ein endlichdimensionaler Teilraum eines normierten Raumes ist stets abgeschlossen.

$\boxed{\textbf{14}}$ Es sei $D\colon C^1([0,1]) \to C([0,1])$, $f \mapsto f'$ der Ableitungsoperator. Zeige:

(a) Wenn sowohl $C^1([0,1])$ als auch $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm $\| \; \|_\infty$ ausgestattet werden, ist D nicht stetig.

(b) Wenn wir stattdessen auf $C^1([0,1])$ die Norm aus $\boxed{9}$(b) verwenden, so wird D stetig.

$\boxed{\textbf{15}}$ Seien X und Y normierte Räume und $A \in L(X,Y)$. Zeige:

(a) A besitzt eine auf $\mathrm{im}(A)$ definierte stetige Inverse, falls A *nach unten beschränkt* ist, d.h. es gibt ein $c > 0$, sodass $\|Ax\| \ge c\|x\|$ für alle $x \in X$.

(b) A kann nicht stetig invertierbar sein, falls es eine Folge (x_n) in X mit $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ und $Ax_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gibt.

(c) Sei X ein Banachraum und A nach unten beschränkt, dann ist $\mathrm{im}(A)$ abgeschlossen in Y.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Wir verwenden hier $\boxed{3}$, um das Resultat aus der VO über die Neumannreihe in einer Banachalgebra X mit Einselement e zu verbessern.

(a) Zeige: Gibt es zu $x \in X$ eine nichtnegative Zahl $q < 1$ mit $\sqrt[n]{\|x^n\|} \leq q$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergent in X.

(Bemerkung: Es gilt übrigens stets $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$; und diese Zahl stimmt auch mit dem sogenannten Spektralradius von x überein. Das alles wird aber in dieser Aufgabe nicht benötigt.)

(b) Ist $x \in X$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergent, dann ist $e - x$ invertierbar und es gilt $(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

(c) Warum ist der Spezialfall aus der VO mit $\|x\| < 1$ in der Kombination von (a) und (b) enthalten?

$\boxed{\mathbf{17}}$ Wende $\boxed{16}$ auf die Banachalgebra $L(C([0,1]))$ an, um zu zeigen, dass für beliebiges festes $k \in C([0,1] \times [0,1])$ die *Volterra-Integralgleichung*

$$x(s) - \int_0^s k(s,t)x(t)\,dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

für jedes $y \in C([0,1])$ eine eindeutige Lösung $x \in C([0,1])$ besitzt. (Außerdem hängt die Lösung x stetig bzgl. $\|.\|_\infty$ von y ab.)

$\boxed{\mathbf{18}}$ Verwende den Satz von Baire, um zu zeigen, dass ein unendlichdimensionaler Banachraum keine abzählbare (Hamel-)Basis besitzen kann. (Hinweis: Überlege zuerst, ob endlichdimensionale Teilräume innere Punkte enthalten können.)

$\boxed{\mathbf{19}}$ Seien X, Y, Z normierte Räume, (A_n) eine Folge in $L(Y,Z)$, (B_n) eine Folge in $L(X,Y)$.

(a) Zeige: Sind (A_n) bzw. (B_n) gleichmäßig konvergent, d.h. jeweils bezüglich der Operatornorm, gegen $A \in L(Y,Z)$ bzw. $B \in L(X,Y)$, dann ist die Produktfolge (A_nB_n) gleichmäßig konvergent gegen $AB \in L(X,Z)$, d.h. $\|A_nB_n - AB\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

(b) Folgere aus den Banach-Steinhaus-Sätzen, wenn wir nun Y als Banachraum voraussetzen: Sind (A_n) bzw. (B_n) punktweise konvergent gegen $A \in L(Y,Z)$ bzw. $B \in L(X,Y)$, dann ist die Produktfolge (A_nB_n) punktweise konvergent gegen $AB \in L(X,Z)$, d.h. für jedes $x \in X$ gilt $A_nB_nx \to ABx$ in Z für $n \to \infty$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Zeige ${c_0}' \cong l^1$ durch den Nachweis, dass die Abbildung $T\colon l^1 \to {c_0}'$ einen isometrischen Isomorphismus ergibt, wobei $Ta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ für $a \in l^1$ und $x \in c_0$ ist.

$\boxed{\mathbf{21}}$ (a) Zeige durch direkte Untersuchung (d.h. ohne Rückgriff auf den Satz von Riesz), dass es sich bei folgenden Abbildungen jeweils um stetige lineare Funktionale auf $C([-1,1])$ handelt:

(i) $t_0 \in [-1,1]$ fest, $\delta_{t_0}\colon f \mapsto f(t_0)$,

(ii) $g \in L^1([-1,1])$ fest, $Tg\colon f \mapsto \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx$,

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n \in L^1([-1,1])$ definiert durch $g_n(x) = n/2$ für $|x| \leq 1/n$ und $g_n(x) = 0$ sonst. Zeige, dass Tg_n auf $C([-1,1])$ punktweise gegen δ_0 konvergiert, aber nicht gleichmäßig (im Sinne der Operatornorm von $L(C([-1,1],\mathbb{C}))$.

$\boxed{\textbf{22}}$ Sei X ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Teilraum. Zeige, dass die kanonische Surjektion $q\colon X \to X/U$ stetig und offen ist, wenn X/U mit der Quotientennorm ausgestattet wird. (Dies soll hier natürlich ohne Verwendung der Bemerkung aus der VO in 1.21 über die Quotiententopologie gezeigt werden, sondern direkt aus der Definition der Quotientennorm.)

$\boxed{\textbf{23}}$ Sei X ein normierter Raum und $\mu\colon X \to \mathbb{K}$ linear.

(a) Wiederhole aus der Linearen Algebra, dass $\dim X/\ker(\mu) = 1$ für $\mu \neq 0$ und für $\mu = 0$ natürlich $\ker(\mu) = X$ (daher $\dim X/\ker \mu = 0$).

(b) Sei nun zusätzlich $\ker(\mu)$ abgeschlossen, sodass $X/\ker(\mu)$ zum normierten Raum wird. Folgere, dass dann die (injektive) Faktorabbildung $\widetilde{\mu}\colon X/\ker(\mu) \to \mathbb{K}$ stetig ist.

$\boxed{\textbf{24}}$ Sei X ein normierter Raum und $\mu\colon X \to \mathbb{K}$ linear. Verwende die Resultate der vorigen beiden Aufgaben, um zu zeigen: μ ist stetig $\Leftrightarrow$ $\ker(\mu)$ ist abgeschlossen.
(Für lineare Abbildungen $A\colon X \to Y$ zwischen normierten Räumen gibt es so ein Resultat nicht. Zwar ist für stetiges A immer $\ker(A)$ abgeschlossen, aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht mehr.)

$\boxed{\textbf{25}}$ Sei X ein normierter Raum. Zeige: Eine Teilmenge $M \subseteq X$ ist genau dann beschränkt, wenn für jedes $\mu \in X'$ die Bildmenge $\mu(M) \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt ist. (Hinweis: X' ist ein Banachraum und $f_y\colon X' \to \mathbb{K}$, $\mu \mapsto \mu(y)$ für $y \in M$ definiert eine punktweise beschränkte Familie in $L(X', \mathbb{K})$.) Folgere, dass schwach konvergente Folgen in X beschränkt sind.

$\boxed{\textbf{26}}$ Wir notieren mit e_n wie üblich jene Folge in $\mathbb{K}$, deren n-te Komponente 1 ist und alle anderen 0. Zeige:

(a) Für $1 < p < \infty$ konvergiert die Folge (e_n) in l^p schwach gegen 0, kann aber nicht normkonvergent sein.

(b) In l^1 konvergiert (e_n) nicht schwach. (Bemerkung: Nach einem Lemma von Schur ist im l^1 jede schwach konvergente Folge bereits normkonvergent.)

$\boxed{\textbf{27}}$ Seien X, Y normierte Räume und $A \in L(X, Y)$. Zeige, dass A schwach folgenstetig ist, d.h. wenn (x_n) in X schwach gegen x konvergiert, dann strebt (Ax_n) schwach gegen (Ax).

$\boxed{\textbf{28}}$ Eine Folge (x_n) in einem normierten Raum X heiße *schwache Cauchyfolge*, wenn $(f(x_n))$ für jedes $f \in X'$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist (äquivalent: $\lim f(x_n)$ existiert für jedes $f \in X'$). Zeige: Wenn X ein reflexiver Banachraum ist, dann hat jede schwache Cauchyfolge in X einen schwachen Grenzwert in X. (Zwei Hinweise: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit; Cauchyfolgen mit konvergenten Teilfolgen sind konvergent.)

$\boxed{\textbf{29}}$ Es sei $1 \leq p < \infty$ und $k \in C([0,1] \times [0,1])$. Für jedes $f \in L^p([0,1])$ setzen wir

$$(Af)(s) := \int_0^1 k(s,t)f(t)\,dt \quad \forall s \in [0,1].$$

Zeige: (a) Dadurch wird ein stetiger Operator $A \in L(L^p([0,1]))$ definiert.

(b) Der Adjungierte A' lässt sich als Integraloperator auf $L^q([0,1])$ $(1/q = 1 - 1/p)$ auffassen und hat den Integralkern $k' \in C([0,1] \times [0,1])$, wobei $k'(s,t) = k(t,s)$ für alle $s,t \in [0,1]$ gilt.

$\boxed{\textbf{30}}$ Es bezeichne M den Multiplikationsoperator mit $(Mf)(t) := tf(t)$ für alle $f \in C([0,1])$. (Wie üblich, wenn nichts anderes gesagt wird, meinen wir hier mit $C([0,1])$ einen *komplexen* Vektorraum, d.h. $C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$.) Zeige:

(a) $M \in L(C([0,1]))$ mit $\|M\| = 1$,

(b) $\sigma(M) = [0,1] \subseteq \mathbb{C}$,

(c) M hat keine Eigenwerte, d.h. $\sigma_p(M) = \emptyset$.

$\boxed{\textbf{31}}$ Auf l^p $(1 \leq p \leq \infty)$ betrachten wir den Rechts- bzw. Linksshift, definiert für jede Folge $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^p$ durch $R(x_1, x_2, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots)$ bzw. $L(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots)$. Es sei $K := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$. Zeige:

(a) $\|R\| = \|L\| = 1$ und daher $\sigma(R) \subseteq K$ sowie $\sigma(L) \subseteq K$,

(b) jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ ist Eigenwert von L und daher folgt auch $\sigma(L) = K$,

(c) R hat keine Eigenwerte,

(d) für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ ist $e_1 \notin \operatorname{im}(\lambda - R)$ und daher folgt auch $\sigma(R) = K$.

$\boxed{\textbf{32}}$ Wende den in der VO erwähnten Satz von von Arzelá-Ascoli an, um zu zeigen, dass der Integraloperator

$$(Af)(s) := \int_0^1 k(s,t)f(t)\,dt \quad \forall s \in [0,1]$$

mit stetiger Kernfunktion $k\colon [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ auf $C([0,1])$ kompakt ist.

$\boxed{\textbf{33}}$ Seien X, Y, Z normierte Räume und $A \in L(Y,Z)$, $B \in L(X,Y)$. Zeige: Die Verknüpfung AB ist kompakt, falls A oder B kompakt ist.

$\boxed{\textbf{34}}$ Seien X, Y Banachräume. Eine lineare Abbildung $A\colon X \to Y$ heiße *vollstetig*, falls gilt: Ist (x_n) in X schwach konvergent gegen x, dann ist (Ax_n) in Y normkonvergent gegen Ax.

(a) Zeige: Jedes $A \in K(X,Y)$ ist vollstetig.
(Hinweis: Verwende die Folgerung in $\boxed{25}$, $\boxed{27}$ sowie 2.18(i) aus der VO, um zu einer Teilfolge (Ax_{n_k}) mit Normkonvergenz $Ax_{n_k} \to Ax$ zu gelangen; wäre die gesamte Folge (Ax_n) nicht auch normkonvergent gegen Ax, so gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $(Ax_{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\|Ax - Ax_{m_l}\| \geq \varepsilon_0$; allerdings können wir mit der schwach konvergenten Folge $(x_{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$ dasselbe Spiel wie mit der Originalfolge (x_n) treiben und erhalten eine normkonvergente Teilteilfolge ...)

(b) Zeige: Ist X reflexiv und ist $A \in L(X,Y)$ vollstetig, dann ist A kompakt.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Sei H ein Prähilbertraum und $u_1, \ldots, u_m \in H$ seien paarweise orthogonal sowie auf Länge 1 normiert (also ein endliches Orthonormalsystem). Für gegebenes $x \in H$ seien Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ gesucht, sodass $\|x - \sum_{n=1}^m \lambda_n u_n\|$ minimal wird. Zeige, dass die eindeutige Lösung durch $\lambda_n = \langle x, u_n \rangle$ gegeben wird. Weiters ist in diesem Fall der Vektor $x - \sum_{n=1}^m \lambda_n u_n$ orthogonal zu $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_m\}$ und es gilt

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n u_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, u_n \rangle|^2.$$

$\boxed{\mathbf{36}}$ Sei H ein Hilbertraum, (x_n) eine Folge in H und $x \in H$. Zeige die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) (x_n) konvergiert gegen x,

(ii) $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ für alle $y \in H$ und zusätzlich gilt $\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$.

$\boxed{\mathbf{37}}$ Sei (x_n) eine Folge von paarweise orthogonalen Elementen in einem Hilbertraum H. Zeige: $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konvergiert in H genau dann, wenn $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2 < \infty$ gilt.

$\boxed{\mathbf{38}}$ In l^2 betrachte die Teilmenge $U := \{(x_n) \in l^2 \mid x_{2k} = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}\}$. Zeige, dass U ein abgeschlossener Teilraum ist und beschreibe die orthogonale direkte Summenzerlegung $l^2 = U \oplus U^\perp$ möglichst konkret.

$\boxed{\mathbf{39}}$ Zeige folgende Relationen für abgeschlossene Teilräume U_1 und U_2 eines Hilbertraumes: $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ und $(U_1 \cap U_2)^\perp = \overline{U_1^\perp + U_2^\perp}$.

$\boxed{\mathbf{40}}$ Zeige: Ist $S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$ ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H, so konvergiert (u_n) in H schwach gegen 0.

$\boxed{\mathbf{41}}$ Auf $L^2([0,1])$ sei A der Integraloperator

$$\forall f \in L^2([0,1]) \colon \quad (Af)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt \quad (s \in [0,1])$$

mit Integralkern $k \in C([0,1] \times [0,1])$, der reellwertig sei und symmetrisch, d.h. $k(t,s) = k(s,t)$ für alle $s,t \in [0,1]$. Wir wissen zwar bereits aus $\boxed{29}$, dass A stetig ist und kennen auch prinzipiell die Gestalt der Adjungierten, aber die folgenden Aussagen sollen hier unabhängig davon im Hilbertraumkontext nachgewiesen werden. Zeige:

(a) $\|A\| \le \|k\|_\infty$,
(Hinweis: Abschätzung $\|Af\|_2^2 \le \|k\|_\infty^2 \|f\|_2^2$ mittels Integralen und Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)

(b) $\forall f, g \in L^2([0,1])$ gilt $\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$. (Hinweis: Satz von Fubini.)

(Diese Aufgabe zeigt also, dass A ein selbstadjungierter Operator auf $L^2([0,1])$ ist. Die Abschätzung in (a) wird in der VO verwendet, um auch die Kompaktheit von A bequem nachweisen zu Können.)

$\boxed{\mathbf{42}}$ Zeige folgende Eigenschaften für den zu $B \in L(H_1, H_2)$ adjungierten Operator B^* im Sinne der Hilberträume:

(a) $\|BB^*\| = \|B^*B\| = \|B\|^2$,

(b) $\ker B = (\operatorname{im} B^*)^\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{im} B} = (\ker B^*)^\perp$ bzw. $\ker B^* = (\operatorname{im} B)^\perp$.

$\boxed{\mathbf{43}}$ Zeige, dass Unitarität von $U \in L(H_1, H_2)$ wie folgt charakterisiert ist:

$$U \text{ ist surjektiv und } \langle Ux, Uy\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1} \text{ für alle } x, y \in H_1.$$

$\boxed{\mathbf{44}}$ Sei $A \in L(H)$. Zeige, dass A genau dann normal ist, wenn gilt:

$$\forall x, y \in H\colon \quad \langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle.$$

$\boxed{\mathbf{45}}$ Wir betrachten hier $U := \{f \in C^1([0,1]) \mid f(0) = f(1)\}$ als (dichten, nicht abgeschlossenen) Teilraum von $L^2([0,1])$ und definieren die lineare Abbildung $D\colon U \to L^2([0,1])$ durch $f \mapsto if'$. Zeige:

(a) $\forall f, g \in U$: $\langle Df, g\rangle = \langle f, Dg\rangle$,

(b) D ist nicht stetig und kann daher auch nicht die Einschränkung eines selbstadjungierten Operators $\widetilde{D} \in L(L^2([0,1]))$ sein.

Wie verhält sich die Erkenntnis aus (a) und (b) zum Satz von Hellinger-Toeplitz?