PUE Analysis für Physiker∗innen III WS 22/23

Blatt 1

Dieses Aufgabenblatt dient als Vorbereitung auf den ersten Vorlesungsteil über Komplexe Analysis. Dafür erinnern wir uns an zahlreiche Konzepte und Resultate aus dem ersten und zweiten Semester, die sich auf komplexe Zahlen und Teilmengen von $\mathbb{C}$ gestützt haben bzw. auf solche anwendbar sind: In Band 1 von Fischer-Kaul siehe §7 (Abschnitte 3 und 4 über komplexe Folgen und Reihen), §10 (Potenzreihen und Konvergenzradius [mit unseren Ergänzungen zur Berechnung desselben]) und auch 2.7 aus §12 über die gleichmäßige Konvergenz gegen die Summenfunktion einer Potenzreihe; weiters beachte §21 (normierte Räume in Anwendung auf $\mathbb{C}$ als Ebene mit der euklidischen Norm); vergleiche auch die Technik mit komplexen Wegen bei der Behandlung von „Ringgebieten“ in §26, Unterabschnitt 3.6.

$\boxed{1}$ (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ mittels $|x+iy| := \sqrt{x^2+y^2}$ zu einem (reellen) normierten Raum wird. Darüberhinaus gilt $|z| \geq |\operatorname{Re} z|$, $|z| \geq |\operatorname{Im} z|$ und $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(b) Skizzieren und beschreiben Sie eine offene Kreisschreibe $K_r(z_0)$ um den beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$. Wie sind mit deren Hilfe offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ charakterisiert? Wie die Randpunkte? Welche Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind kompakt? Wiederholen Sie den Begriff eines Gebietes für den Spezialfall $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

$\boxed{2}$ Wiederholen Sie die Definition der Konvergenz einer komplexen Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Dies ist äquivalent zu der Eigenschaft, dass $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0$ für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}$ gilt.

$\boxed{3}$ Bestimmen Sie die Konvergenzradien für folgende Potenzreihen (mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$): (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ und (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$. Welche beiden reellen Funktionen werden dadurch auf welche komplexen Gebiete fortgesetzt?

$\boxed{4}$ Grenzwerte von Funktionen: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$ und $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ gegeben. Aus unserem Wissen über normierte Räume abgeleitet können wir $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$ schreiben, falls $f(z_n) \to w$ gilt für jede Folge (z_n) in $\Omega \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$. Ist f auch in z_0 definiert, dann gewinnen wir daraus ein Kriterium für die *Stetigkeit* von f bei z_0, nämlich durch die Bedingung $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Begründen Sie: (a) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ (z.B. mittels der Potenzreihe für exp),
(b) mittels einer Potenzreihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ erhalten wir eine stetige Funktion $f\colon K_R(z_0) \to \mathbb{C}$.

$\boxed{5}$ Wir schreiben eine (stückweise) glatte Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ im Folgenden häufig in der Form $\gamma(t) = z(t) = x(t) + i\,y(t)$ mit reellen Funktionen $t \mapsto x(t)$ und $t \mapsto y(t)$. Für stetige Funktionen $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ setzen wir $\int_a^b \big(u(t) + iv(t)\big)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i \int_a^b v(t)\,dt$.

(a) Begründen Sie, warum die Länge $L(\gamma)$ der Kurve durch $\int_a^b |\dot{z}(t)|\,dt$ gegeben ist.

(b) Für eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf dem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ mit $\gamma([a,b]) \subseteq \Omega$ definieren wir das *komplexe Kurvenintegral* durch $\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt$. Welchen zwei reellen vektoriellen Kurvenintegralen entspricht dies im Falle $f = g + ih$ mit $g, h\colon \Omega \to \mathbb{R}$?

$\boxed{6}$ Es bezeichne $C_r(z_0)$ die Kreislinie mit Radius $r > 0$ um $z_0 \in \mathbb{C}$, die wir mittels $z(t) = z_0 + re^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ parametrisieren. Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale:

(a) $\displaystyle\int_{C_r(z_0)} \frac{dz}{z - z_0}$ und (b) $\displaystyle\int_{C_r(z_0)} (z - z_0)^m\,dz$ für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq -1$.