PUE Analysis für Physiker∗innen III — WS 22/23

Blatt 2

7 Ein stationäres Strömungsfeld w sei von der Form $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei u und v reelle C^1-Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ sind. Begründen Sie, warum die Bedingungen der *Wirbelfreiheit* ($\operatorname{rot} w = 0$) und der *Inkompressibilität* ($\operatorname{div} w = 0$) an w gleichbedeutend sind mit der Holomorphie der komplexen Funktionen $g\colon z \mapsto \overline{f(z)}$ und $h\colon z \mapsto \overline{-if(z)}$, wobei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch $f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$.

8 (a) Welche der folgenden Ausdrücke ergeben eine holomorphe Funktion? Wie lauten diese direkt als Funktionen von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ausgedrückt?
(i) $x - iy$, (ii) $(x^2 - y^2 + x) + i(y + 2xy)$, (iii) $(x^2 - y^2 + x) + i(2xy - y)$.

x+iy

(b) Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$ sowie $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x,y)$ seien C^2-Funktionen[1]. Zeigen Sie, dass sowohl u als auch v *harmonische Funktionen* sind, d.h. (erinnere: $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$) es gilt $\Delta u = 0$ und $\Delta v = 0$.

9 Es sei $z = re^{i\varphi}$ ein Punkt der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, d.h. $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$. Weisen Sie für den Hauptzweig des Logarithmus die Formel $\log z = \log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$ nach, indem Sie folgenden Weg von 1 nach z betrachten: Zunächst entlang der reellen Achse von 1 nach r; anschließend entlang eines geeigneten Kreisbogens von r nach $z = re^{i\varphi}$.

10 Wir hatten in der VO kurz die beiden Zweige der Quadratwurzel in der geschlitzten Ebene $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ besprochen, also holomorphe Funktionen $f_1, f_2\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f_1(z)^2 = z = f_2(z)^2$ für alle $z \in \Omega$. (Also formal $(\sqrt{z})^2 = z$.)

(a) Verwenden Sie das Resultat aus der vorigen Aufgabe, um konkrete Formeln für f_1 und f_2 mittels Polarkoordinaten anzugeben. (Es ist günstig, f_2 mit Hilfe des ersten Nebenzweiges $\log z + 2\pi i$ des Logarithmus darzustellen.)

(b) Wie steht es eigentlich um die Gültigkeit einer Formel $f_j(z^2) = z$, also formal $\sqrt{z^2} = z$, in Abhängigkeit von j und der Lage von z^2 bzgl. Ω?

11 Wir wissen aus der VO, dass $z \mapsto 1/z$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytisch ist. Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung um einen beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$? Wie sieht es mit Konvergenz in den Randpunkten der entsprechenden Kreisscheibe aus?

12 Anwendungen der Cauchyschen Integralformel für Kreise:

(a) Was ergibt sich daraus jeweils für den Funktionswert im Kreismittelpunkt?

(Sogenannte Mittelwerteigenschaft.)

(b) Wie kann die Formel z.B. bei der bequemen Auswertung von $\displaystyle\int_{C_r(0)} \frac{e^w\,dw}{w^2 + 2w}$ helfen?

(Hinweis: $\frac{1}{w^2+2w} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w+2}\right)$.)

[Unter der Annahme r > 2.]

[1] Wir werden in der VO bald sehen, dass die C^2-Eigenschaft automatisch aus der Holomorphie folgt.