# PUE Analysis für Physiker∗innen III WS 22/23

Blatt 3

**13** Zeigen Sie für beliebige reelle $x$ und $y$ die Relationen

$$\cos(iy) = \cosh(y), \quad \sin(iy) = i\sinh(y), \quad \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

**14** Geben Sie die Laurent-Entwicklung von $f(z) = z^2 \exp(-1/z)$ um $z_0 = 0$ an. Welchen Wert lesen wir daraus für das Residuum von $f$ an der Stelle 0 ab?

**15** (a) Zeigen Sie durch Betrachtung der Funktion $g(z) := \sin(\pi z)$, dass $1/g$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist abgesehen von einfachen Polen der Ordnung 1 in den Punkten $n \in \mathbb{Z}$.
(b) Bestimmen Sie die Residuen von $f(z) := \pi \cot(\pi z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ an den Stellen $n \in \mathbb{Z}$.

**16** Bestimmen Sie die Stellen und Ordnungen der Pole von $f(z) = \dfrac{z^3+1}{(z^2-1)^3(z^2+1)^2}$.
Welche Residuen wären gemäß Residuensatz bei der Berechnung des komplexen Kurvenintegral von $f$ entlang des Kreises $C_{\sqrt{3}}(1)$ vom Radius $\sqrt{3}$ um den Punkt 1 auszuwerten?
Bemerkung: Die tatsächliche Berechnung ist in dieser Aufgabe nicht verlangt und recht aufwändig, wobei folgende Erweiterung einer Methode aus der VO zur Residuenberechnung verwendbar ist: Wenn $z_0$ ein $m$-facher Pol von $f$ ist, dann gilt

$$(*) \qquad \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big( (z-z_0)^m f(z) \Big) \right).$$

(Details zum Wert des obigen Integrals finden sich in den Lösungsnotizen.)

Wenden Sie in den folgenden beiden Aufgaben jeweils den Residuensatz an, um die angegebenen Integrale zu berechnen:

**17** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ (Hinweis: Formel (∗) für Residuum in einem Pol 2. Ordnung verwenden).

**18** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)\sin(2x)}{x^2+2x+2}\,dx$ (Hinweis: $\sin(2x) = \operatorname{Im} e^{2ix}$).