PUE Analysis für Physiker∗innen III WS 22/23

Blatt 4

$\boxed{\mathbf{19}}$ Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $u(x) = e^{-a|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$, $a > 0$). Wie passt das mit dem Ergebnis eines Beispiels in der VO am Ende des Kapitels über Komplexe Analysis zusammen?

$\boxed{\mathbf{20}}$ (a) Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, A eine invertierbare reelle $(n \times n)$-Matrix und $v(x) := u(Ax)$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ folgende Relation gilt:

$$\widehat{v}(y) = \frac{1}{|\det A|}\,\widehat{u}((A^{-1})^T y).$$

(b) Schließen Sie mit Hilfe von (a), dass die Fouriertransformierte einer radialsymmetrischen[1] Funktion ebenfalls diese Eigenschaft hat.

$\boxed{\mathbf{21}}$ (a) Begründen Sie, warum $u(x) := q(x)e^{-x^2/2}$ ($x \in \mathbb{R}$) für jedes Polynom q eine rasch fallende Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert, also ein Element von $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\widehat{u}(y) = q(i\frac{d}{dy})e^{-y^2/2}$ gilt für die Funktion u aus (a).

$\boxed{\mathbf{22}}$ (a) Aus der VO wissen wir $v(y) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \widehat{\chi_{[-1,1]}}(y) = \frac{\sin y}{y}$. Die Funktion v ist zwar nicht (absolut) integrierbar über $\mathbb{R}$, gehört aber zu $L^2(\mathbb{R})$. Begründen Sie Letzteres und bestimmen Sie $\|v\|_2$ sowie $\widehat{v}$ mit Hilfe geeigneter Eigenschaften der Fouriertransformation.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die gegeben ist durch $u(t) = 0$ für $t < 0$ und $u(t) = e^{-t}e^{i\omega t}$ für $t \geq 0$, wobei $\omega > 0$ ist.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Bestimmen Sie für $u(x) = |x|/2$ die distributionellen Ableitungen u' und u''.

[Die sogenannte Signum-Funktion ist $\operatorname{sgn}(x) := -1$ ($x < 0$), $\operatorname{sgn}(0) := 0$ und $\operatorname{sgn}(x) := 1$ ($x > 0$).]

$\boxed{\mathbf{24}}$ Berechnen Sie direkt mittels Definition der distributionellen Fouriertransformation:

(a) $\widehat{u_a}$ für $u_a(x) = e^{iax}/\sqrt{2\pi}$ ($a, x \in \mathbb{R}$),

(b) $\widehat{v}$ für $v(x) = x/\sqrt{2\pi}$ ($x \in \mathbb{R}$).

[1] D.h. ursprünglich, dass die Funktionswerte nur vom Radius abhängen; äquivalent dazu ist die Invarianz unter orthogonalen Transformationen der Koordinaten.