

25 Bei den Separationsansätzen in der VO haben wir mehrfach auf Fourierreihenentwicklungen aus dem Stoff der Analysis I zurückgegriffen. Wiederholen Sie die Grundbegriffe in reeller sowie komplexer Fassung, aber angepasst an Funktionen *mit beliebiger Periode* $2L$ ($L > 0$), die wir z.B. auf dem Intervall $[-L, L]$ betrachten; geben Sie die entsprechend adaptierten Formeln für die Reihenentwicklung sowie für die Koeffizienten an. Was erhalten wir in der reellen Version speziell für die Fourierentwicklung der *ungeraden* Fortsetzung einer zunächst auf $[0, L]$ gegebenen integrierbaren reellen Funktion f mit $f(0) = f(L) = 0$?

Geben Sie in den folgenden drei Aufgaben jeweils die in der VO aus Separationsansätzen gewonnenen Fourierdarstellungen für die Lösung an:

26 Wellengleichung $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ ($0 < x < 1$, $t \in \mathbb{R}$) mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(1, t) = 0$ und den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = -x(x-1)$, $\partial_t u(x, 0) = 0$.

27 Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u$ ($0 < x < 2$, $t \in \mathbb{R}$) mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\frac{2}{\pi}, t) = 0$ und der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$, wobei $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq 1$ bzw. $f(x) = 2 - x$ für $1 < x \leq 2$ gilt.

28 Stationäres Wärmeleitungsproblem, d.h. $\Delta u = 0$ auf der Kreisscheibe $K_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Randbedingung $u = f$ auf $S^1 = \partial K_1(0)$ für zwei konkrete Beispiele von f :

(a) $f = 1$ (konstant) und (b) $f(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos^2 \varphi$ (d.h. $f(x, y) = x^2$ für $x^2 + y^2 = 1$). (Hinweis: In beiden Fällen ergibt sich eine recht einfache endliche Summe mittels komplexer Fourierreihe, die sich schließlich als Polynom in den Variablen x und y ausdrücken lässt.)

In den folgenden beiden Aufgaben skizzieren wir ein Argument dafür, dass das Newton-Potential $\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}$ tatsächlich eine Fundamentallösung für $-\Delta$ in drei Dimensionen ergibt, d.h. $-\Delta\Gamma = \delta_0$ auf \mathbb{R}^3 im distributionellen Sinne gilt.

29 Für eine stetige Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $\tilde{f}: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ der *sphärischen Mittel* durch

$$\tilde{f}(r) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(r\omega) d\omega \left[= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f\left(r \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}\right) \sin \theta d\theta d\alpha \right].$$

Begründen Sie: (a) Es gilt $\tilde{f}(0) = f(0)$ und die Relation (vgl. Aufgabe **19**, UE Analysis II) $\Delta(\tilde{f}(\|x\|)) = \tilde{f}''(r) + \frac{2}{r}\tilde{f}'(r)$ für $r = \|x\|$.

(b) $\Gamma(\psi) = \int_0^\infty r \tilde{\psi}(r) dr$ für jede Testfunktion ψ auf \mathbb{R}^3 .

30 Zeigen Sie nun mit Hilfe der Resultate aus der vorigen Aufgabe, dass $-\Delta\Gamma(\psi) = \psi(0)$ gilt für jede Testfunktion ψ auf \mathbb{R}^3 . Ein bisschen müssen und dürfen Sie aber bei der Berechnung nun noch „schummeln“, indem Sie nach Umwandlung in ein eindimensionales Integral über die radiale Variable einfach $\widetilde{\Delta\psi}$ durch $\Delta\tilde{\psi}$ ersetzen, um nämlich die zweite Relation aus (a) in obiger Aufgabe anwenden zu können. (Das hat schon seine Richtigkeit, wäre aber nicht so leicht „auf elementare Art“ zu beweisen; siehe z.B. Proposition 9.2, Chapter I in F. Trèves, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press 1975.)