PUE Analysis für Physiker∗innen III   WS 22/23

Blatt 6

$\boxed{\mathbf{31}}$ Begründen Sie: Für $\Omega :=]-1,1[$ und $u(x) := 1 - |x|$ gilt $u \in W^1(\Omega)$.
(Bemerkung: Es gilt sogar $u \in W_0^1(\Omega)$, während z.B. $1 \in W^1(\Omega) \setminus W_0^1(\Omega)$.)

$\boxed{\mathbf{32}}$ Begründen Sie: Betrachten wir das Newton-Potential $\Gamma(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}$ auf der offenen Einheitskugel $\Omega := K_1(0)$ im $\mathbb{R}^3$, so gilt $\Gamma \in L^2(\Omega)$ und $\partial_j \Gamma \in L^1(\Omega) \setminus L^2(\Omega)$ für $1 \leq j \leq 3$; somit ist $\Gamma \notin W^1(\Omega)$. (Hier dürfen Sie abkürzend $\partial_j \Gamma$ direkt mittels klassicher Ableitung für $x \neq 0$ berechnen; man kann zeigen, dass dies in diesem Fall auch die richtige distributionelle Ableitung ergibt. Im Allgemeinen ist das falsch, wie schon auf $\mathbb{R}$ das Beispiel der Heaviside-Funktion mit Ableitung Delta lehrt!)

$\boxed{\mathbf{33}}$ Wir betrachten das sehr elementare eindimensionale Dirichlet-Problem $-u'' = \theta$ in $\Omega :=]-1,1[$ und $u(-1) = u(1) = 0$, wobei θ die Heaviside-Funktion bezeichne, also $\theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\theta(x) = 1$ für $x > 0$. Erraten Sie für diesen Fall eine schwache Lösung einfach durch zweifaches Integrieren und skizzieren Sie die so erhaltene Funktion u sowie ihre Ableitung. Verifizieren Sie schließlich, dass u eine schwache Lösung ist, d.h.

$$\int_{-1}^{1} u'(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \theta(x)\,\varphi(x)\,dx$$

erfüllt für jedes $\varphi \in C_0^1([-1,1]) = \{\psi \in C^1([-1,1]) \mid \psi(-1) = \psi(1) = 0\}$.
(Bemerkung: u ist auch eine *distributionelle Lösung* der Differentialgleichung $-u'' = \theta$.)

$\boxed{\mathbf{34}}$ Rechnen Sie folgende Eigenschaften des Wärmeleitungskerns $\Gamma(x,t) = \frac{\exp(-\|x\|^2/(4t))}{(4\pi t)^{n/2}}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ nach: (a) $\partial_t \Gamma - \Delta \Gamma = 0$ und
(b) $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t)\,dx = 1$, d.h. $x \mapsto \Gamma(x,t)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Verwenden Sie die Lösungsformel mittels Wärmeleitungskern für das eindimensionale homogene Anfangswertproblem $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) und $u(x,0) = u_0(x)$:

(a) Die Anfangsdaten $u_0 = \chi_{[-1,1]}$ verschwinden zwar außerhalb von $[-1,1]$, aber es gilt $u(x,t) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$;

(b) Für die Anfangsdaten $u_0(x) = e^{-x}$ können wir die Lösung sogar explizit berechnen (und dies ist eher ein sehr untypischer Glücksfall; meist sind wir auf qualitative Analyse angewiesen).

$\boxed{\mathbf{36}}$ Bezeichne Γ weiterhin den Wärmeleitungskern und $u_t(x) := \Gamma(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

(a) Aus der VO können wir $\widehat{u_t}$ explizit angeben und leicht sehen, dass $\lim\limits_{t\to 0+} \widehat{u_t}(y) = (2\pi)^{-n/2}$ für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Begründen Sie, dass $\lim\limits_{t\to 0+} \widehat{u_t} = (2\pi)^{-n/2}$ im Sinne der (temperierten) Distributionen gilt, d.h. $\lim\limits_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u_t}(y)\psi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-n/2}\psi(y)\,dy$ für jede (rasch fallende) Testfunktion ψ auf $\mathbb{R}^n$ (Hinweis: dominierte Konvergenz). Indem wir jetzt noch eine passende Stetigkeit der inversen Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1} \colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ annehmen (was gerechtfertigt ist!), folgern Sie daraus $u_t \to \delta_0$ ($t \to 0+$).

(b) Begründen Sie $\lim\limits_{t\to 0+} u_t = \delta_0$ nun auch durch direkte Rechnung, d.h. indem Sie (nach geeigneter Substitution) $\lim\limits_{t\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} u_t(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ nachweisen für jede Testfunktion φ.