PUE Analysis für Physiker∗innen III — WS 22/23

Blatt 7

$\boxed{37}$ Wir nehmen an, dass h auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert $\lambda > 0$ mit Randwert 0 ist. Rechnen Sie nach:
(a) Die Funktion $u(x,t) := e^{-\lambda t} h(x)$ löst das Anfangsrandwertproblem für $\partial_t u - \Delta u = 0$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,\infty[$ und $u(x,0) = h(x)$ $(x \in \Omega)$.

(b) Für beliebiges $f \in C([0,\infty[)$ löst $v(x,t) := (\int_0^t f(s) e^{-\lambda(t-s)}\, ds) h(x)$ das Anfangsrandwertproblem für $\partial_t v(x,t) - \Delta v(x,t) = h(x) f(t)$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,\infty[$ und $v(x,0) = 0$.

(Bemerkung: In der VO wurde die Lösung des allgemeinen Anfangsrandwertproblems durch Superposition mittels eines vollständigen Systems von Eigenfunktionen für $-\Delta$ diskutiert.)

$\boxed{38}$ (a) Überlegen Sie zunächst: Für den d'Alembert-Operator auf $\mathbb{R}^2$ gilt die Faktorisierung $\Box = \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t + c\,\partial_x)(\partial_t - c\,\partial_x) = (\partial_t - c\,\partial_x)(\partial_t + c\,\partial_x)$ auch bei der Anwendung auf Distributionen $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

(b) Für gegebene $F, G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ setzen wir $v(x,t) := F(x+ct)$ und $w(x,t) := G(x-ct)$ und erhalten Funktionen $v, w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, die wir als Distributionen auf $\mathbb{R}^2$ auffassen können. Rechnen Sie nach, dass in diesem Sinne $\partial_t v - c\,\partial_x v = 0$ und $\partial_t w + c\,\partial_x w = 0$ gilt.

(c) Folgern Sie, dass $u := v + w$ eine distributionelle Lösung der homogenen Wellengleichung auf $\mathbb{R}^2$ ist. (Bemerkung: Als lokal integrable Funktion ist $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$. Mit ein wenig mehr Distributionentheorie kann dies sogar auf den Fall $F, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ausgedehnt werden.)

$\boxed{39}$ *Einflussbereich* bei der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ auf $\mathbb{R} \times]0,\infty[$: Angenommen u ist eine klassische Lösung mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$, $\partial_t u(x,0) = u_1(x)$ und u_0, u_1 verschwinden außerhalb des Intervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$. In welchem Bereich $B \subseteq \mathbb{R} \times [0,\infty[$ kann dann u überhaupt Werte ungleich 0 haben? Was ergibt sich formal als Bereich für den Grenzfall $b \to a+$? Skizzieren Sie die Bereiche auch.

$\boxed{40}$ *Einflussbereich* bei der homogenen Wellengleichung $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \times]0,\infty[$: Ähnlich wie oben betrachten wir eine klassische Lösung u mit den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$, $\partial_t u(x,0) = u_1(x)$. In welchem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3 \times [0,\infty[$ kann dann u überhaupt Werte ungleich 0 haben, falls u_0, u_1 außerhalb der Kugel $\overline{K_R(0)} \subseteq \mathbb{R}^3$ verschwinden? Was ergibt sich formal als Bereich für den Grenzfall $R \to 0+$?

$\boxed{41}$ Wenden Sie Aufgabe $\boxed{38}$ auf den Fall $F = G = \theta/2$ an (θ die Heaviside-Funktion) und berechnen Sie die resultierende Lösung u der Wellengleichung für Zeiten $t \geq 0$ explizit (mit geeigneten Fallunterscheidungen für Teilbereiche in $\mathbb{R} \times [0,\infty[$). Wo ist u stetig bzw. unstetig? Begründen Sie außerdem, dass zumindest formal die Anfangsbedingungen $u(x,0) = \theta(x)$ und $\partial_t u(x,0) = 0$ erfüllt sind.

$\boxed{42}$ Wir betrachten die homogene Wellengleichung $(\partial_t^2 - c^2 \Delta) u = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \times]0,\infty[$ mit radialsymmetrischen Anfangsdaten $u(x,0) = 0$ und $\partial_t u(x,0) = U_1(\|x\|)$, wobei wir U_1 als gerade Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ annehmen dürfen. Rechnen Sie nach, dass wir in diesem Fall folgende Darstellung für die Lösung erhalten: $u(0,t) = t\, U_1(ct)$ und für $\|x\| = r > 0$ ist

$$u(x,t) = \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} s\, U_1(s)\, ds.$$

Sie dürfen hier zur Vereinfachung annehmen, dass auch $x \mapsto u(x,t)$ radialsymmetr~~si~~isch ist (Invarianz von $\Box$ unter räumlichen Drehungen), und somit im Fall $r > 0$ z.B. $x = r e_3$ ansetzen.