$\boxed{43}$ Rechen Sie im Fall $n = 1$ nach, wie die konkrete Lösungsformel für die inhomogene Wellengleichung $\partial_t^2 u(x,t) - c^2 \partial_x^2 u(x,t) = f(x,t)$ $(x \in \mathbb{R}, t > 0)$ mit homogenen Anfangsbedingungen $u(x,0) = 0$ und $\partial_t u(x,0) = 0$ aus dem Duhamel-Prinzip entsteht.

$\boxed{44}$ (a) In der Situation der vorigen Aufgabe nehmen wir nun an, dass f außerhalb des Rechtecks $R_\varepsilon := [-\varepsilon, \varepsilon] \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ verschwindet, also ein kurzes scharfes Signal bei $x = 0$ zum Zeitpunkt $t = 1$ modelliert. Skizzieren Sie die Bereiche in $\mathbb{R} \times [0, \infty[$, wo die Lösung u garantiert verschwindet bzw. wo allenfalls Werte ungleich null zu erwarten sind.

(b) Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen und f mittels zweidimensionaler Dirac-Distribution $\delta_{(0,1)}$ modellieren, die konzentriert im Punkt $(0,1)$ ist. Glücklicherweise lässt sich $\delta_{(0,1)}$ auch recht einfach als Maß interpretieren, nämlich durch

$$\int_A \delta_{(0,1)} := \begin{cases} 1 & (0,1) \in A, \\ 0 & (0,1) \notin A, \end{cases} \qquad (A \subseteq \mathbb{R}^2),$$

sodass wir die Formel aus Aufgabe $\boxed{43}$ weiterhin verwenden können. Berechnen Sie die Werte von u nun durch geeignete Fallunterscheidung nach Teilbereichen von $\mathbb{R} \times [0, \infty[$.

$\boxed{45}$ Rechnen Sie nach, dass $u(x,t) := \theta(t-1)\theta(c(t-1) - |x|)/(2c)$ eine distributionelle Lösung von $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = \delta_{(0,1)}$ auf $\mathbb{R}^2$ ist.

$\boxed{46}$ Für die Lösung des Anfangswertproblems $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $u(x,0) = u_0(x)$ und $\partial_t u(x,0) = u_1(x)$ bezeichne $\widehat{u}(y,t)$ die Fouriertransformation von $x \mapsto u(x,t)$ bei festem $t \in \mathbb{R}$ und ausgewertet bei $y \in \mathbb{R}^n$. Durch diese *räumliche Fouriertransformation* wird das ursprüngliche Anfangswertproblem umgewandelt in eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $t \mapsto \widehat{u}(y,t)$ mit zusätzlichem Parameter $y \in \mathbb{R}^n$ und Anfangsbedingungen. Bestimmen Sie daraus $\widehat{u}(y,t)$ in Abhängigkeit von $\widehat{u_0}(y)$ und $\widehat{u_1}(y)$.

$\boxed{47}$ Die Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sei in der Form $M = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t = \varphi(x)\}$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) M ist charakteristisch für den Wellenoperator $\square = \partial_t^2 - c^2\Delta$, falls $\|\nabla\varphi\| = 1/c$ gilt.

(b) Im Falle, dass (a) zutrifft, beschreibt jede Kurve $s \mapsto \gamma(s)$ im $\mathbb{R}^n$ mit $\dot\gamma(s) = c^2 \nabla\varphi(\gamma(s))$ eine geradlinige Bewegung mit Geschwindigkeit c (also einen „Lichtstrahl“).

(c) Eine Kurve wie in (b) mit $\varphi(\gamma(0)) = 0$ schneidet für jedes $t \in \mathbb{R}$ die *Wellenfront* $M_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid t = \varphi(x)\}$ im Punkt $\gamma(t)$ senkrecht.

$\boxed{48}$ (a) Bestimmen Sie unter allen Hyperebenen jene, die charakteristisch für den Wellenoperator $\square = \partial_t^2 - c^2\Delta$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge M der Funktion $\Phi \colon \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $\Phi(x,t) = t^2 - \frac{\|x\|^2}{c^2}$ eine charakteristische Hyperfläche für den Wellenoperator in $\mathbb{R}^n \times]0,\infty[$ definiert. Stellen Sie M mit einer Funktion $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in der Form $M = \{(x,t) \mid t = \varphi(x)\}$ dar und bestimmen Sie die Wellenfront $M_t \subseteq \mathbb{R}^n$ für beliebiges $t > 0$.