UE Analysis für Physiker∗innen II **SS 22**

Blatt 10

$\boxed{\textbf{55}}$ Sei v ein C^1-Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f \in C^1(\Omega)$. Begründen Sie:
(a) Ist Ω einfach, so besitzt v ein Potential genau dann, wenn $\operatorname{rot} v = 0$ auf Ω gilt;
(b) $\operatorname{div}(fv) = \langle \nabla f, v \rangle + f \operatorname{div} v$; (c) $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$ (hier wird v als C^2 vorausgesetzt).

$\boxed{\textbf{56}}$ Begründen Sie: (a) Für C^1-Vektorfelder v und w auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt[1]

$$\operatorname{rot}(v \times w) = (\operatorname{div} w)v - (\operatorname{div} v)w + dv \cdot w - dw \cdot v.$$

(b) Ist v ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div} v = 0$, dann definiert $w(x) := \int_0^1 t(v(tx) \times x)\, dt$ $(x \in \mathbb{R}^3)$ ein *Vektorpotential* für v, d.h. es gilt $\operatorname{rot} w = v$. (Hinweis: (a) und $\frac{d}{dt}(t^2 v(tx)) = \ldots$)

$\boxed{\textbf{57}}$ Zeigen Sie jeweils, dass es sich um Flächenparametrisierungen handelt und bestimmen Sie auch den *Normalenvektor* $\partial_1\Phi \times \partial_2\Phi$:
(a) Der Graph von $f \in C^1(U)$ über einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^2$, d.h. $\Phi(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(u_1,u_2) \end{pmatrix}$.
(b) Ein geschlitzter Kegelmantel mit $U :=]0, 2\pi[\times]0, \infty[$ und $\Phi(\varphi, z) := \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{58}}$ Geben Sie für den Mantel des Rotationskörpers aus Aufgabe $\boxed{6}$ eine Flächenparametrisierung an, wobei wir die Zusatzbedingung $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ machen und sowohl den Schnitt mit der Halbebene $y = 0$, $z \geq 0$ ausnehmen als auch die „Deckkreisflächen" entfernen (d.h. nur das offene Intervall $a < x < b$ betrachten).

$\boxed{\textbf{59}}$ Zeigen Sie jeweils die behauptete Formel für den Flächeninhalt A.
(a) $A = \int_U (1 + \|\nabla f\|^2)^{1/2}\, d^2u$ für das Flächenstück gemäß Aufgabe $\boxed{57}$(a).
(b) $A = 2\pi \int_a^b f(x)(1 + f'(x)^2)^{1/2}\, dx$ für das Flächenstück gemäß Aufgabe $\boxed{58}$.

des

$\boxed{\textbf{60}}$ Berechnen Sie den Flächeninhalt wie folgt gegebenen Stückes M einer oberen Halbsphäre (Skizze!): Für $0 < h \leq r$ betrachte $M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z > r - h\}$.

[1] Achtung: Stur symbolische Anwendung der sogenannten Graßmann-Identität $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ auf $\nabla \times (v \times w)$ führt zum **falschen Resultat** $\nabla \times (v \times w) = (\operatorname{div} w)v - (\operatorname{div} v)w$. (Diese Bemerkung steht z.B. im Buch *Analysis III* von H. Amann und J. Escher (Birkäuser, 2. Auflage 2008), dort am Ende von Abschnitt XI.6.)