

Blatt 12

Dieses und das nächste (zugleich letzte) UE-Blatt ^{ist}~~sind~~ den klassischen Integralsätzen der Vektoranalysis gewidmet, wobei es uns hier vornehmlich um das Einüben der Anwendung der damit verbundenen Methoden gehen soll und weniger um die kniffligsten Fragen betreffend die rigorose Behandlung möglichst allgemeiner Gebilde als Integrationsbereiche. In diesem Sinne bestimmen bzw. parametrisieren Sie ruhig in den folgenden Aufgaben jeweils Randkurven von Flächen oder Randflächen von dreidimensionalen Gebieten oder Orientierungen von Flächen und Kurven mit Hilfe von Skizzen und Ihrer geometrischen Anschauung (aufbauend eventuell auf frühere UE-Aufgaben).

[67] Für ein ebenes C^1 -Vektorfeld $v = (P, Q)$ mit $\partial_x Q - \partial_y P = 1$ liefert der Integralsatz von Stokes(-Green) in der Ebene eine Variante zur Flächenbestimmung. Wenden Sie diese Idee an, um den Flächeninhalt des von der *Astroide* $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, eingeschlossenen Flächenstücks M zu berechnen. (Als Parametrisierung der Astroide bietet sich $x = a \cos^3 t$ und $y = a \sin^3 t$ mit $t \in [0, 2\pi]$ an.)

[68] Gegeben sind das räumliche Vektorfeld $v(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ und die Schnittkurve C des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ mit der Ebene $x + y + z = 1$, welche von oben gesehen im Gegenuhrzeigersinn orientiert ist. Wenden Sie den Satz von Stokes an, um das Kurvenintegral von v über C auszuwerten.

[69] Gegeben ist das ebene Flächenstück M begrenzt durch die Parabel $y = x^2$ und die Gerade $y = x$ sowie das ebene Vektorfeld $v(x, y) = (xy^2, y + x)$. Berechnen Sie beide Seiten der Formel gemäß Satz von Stokes(-Green) in der Ebene separat.

[70] Sei $z_0 > 0$ beliebig und $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = 1 + z_0^2, z > 0\}$, orientiert mit nach außen weisendem Normalenvektor. Berechnen Sie $\int_M \operatorname{rot} v \cdot d\vec{\sigma}$ für das Vektorfeld $v(x, y, z) = (y, -x, e^{xy})$. Hängt das Ergebnis von z_0 ab? Hängt es überhaupt von der Gestalt von M in Entfernung von der Randkurve ab?

[71] Es sei $v(x, y, z) = (-3y, 3x, z^4)$ und M jener Teil des Ellipsoids $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, der oberhalb der Ebene $z = 1/\sqrt{2}$ liegt. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für diese Situation.

[72] Bereiten Sie ein ca. 5-minütiges Referat vor über eine von Ihnen ausgewählte Anwendung des Integralsatzes von Stokes in der Physik.