UE Analysis für Physiker∗innen II SS 22

Blatt 13

$\boxed{\textbf{73}}$ Sei M die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ und $v(x,y,z) = (2x, y^2, z^2)$. Berechnen Sie $\displaystyle\int_M v \cdot d\vec{o}$.

$\boxed{\textbf{74}}$ Sei Ω die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$, also $\partial\Omega$ die Einheitssphäre. Werten Sie das Oberflächenintegral $\displaystyle\int_{\partial\Omega} (x^2 + y + z)\, do$ durch geschickte Umwandlung in ein Volumsintegral aus.

$\boxed{\textbf{75}}$ Es sei M der Rand von $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1, -1 \le z \le 1\}$ und $v(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$. Berechnen Sie $\int_M v \cdot d\vec{o}$.

Wir betrachten in den folgenden beiden Aufgaben das *Newton-Vektorfeld* v auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, gegeben durch $v(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|^3}\, x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$.

$\boxed{\textbf{76}}$ (Einige Details der Berechnungen hier sind ähnlich zu jenen in $\boxed{17}$(b) und $\boxed{19}$.)

(a) Sicher ist Ihnen das Newton-Potential geläufig. Stellen Sie v als Gradientenfeld dar.

(b) Zeigen Sie, dass v verschwindende Divergenz hat.

(c) Hat nun v auch ein Vektorpotential so wie in Aufgabe $\boxed{56}$(b), d.h. gibt es ein Vektorfeld w mit $v = \operatorname{rot} w$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?[1] Nein. Begründen Sie das mit Hilfe des Resultats in der nächsten Aufgabe zusammen mit dem Satz von Stokes.

$\boxed{\textbf{77}}$ Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gaußsches Gebiet. Wir werden hier die folgende Relation zeigen

$$\int_{\partial\Omega} v \cdot d\vec{o} = \begin{cases} 1, & 0 \in \Omega, \\ 0, & 0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

(a) Im Falle $0 \notin \overline{\Omega}$ ist v auf einer offenen Obermenge von $\overline{\Omega}$ definiert und dort ein C^1-Vektorfeld. Wenden Sie den Integralsatz von Gauß an.

(b) Im Falle $0 \in \Omega$ gibt es eine „kleine" Kugel $0 \in K_\varepsilon(0) \subseteq \Omega$ (warum?). Betrachten Sie das Gebiet Ω' zwischen $\partial K_\varepsilon(0)$ und $\partial\Omega$, insbesondere ist $\partial\Omega' = \partial K_\varepsilon(0) \cup \partial\Omega$ (Skizze! Achtung: Auf $\partial K_\varepsilon(0)$ wird die Orientierung mit nach 0 weisendem Normalenvektor induziert). Wenden Sie nun den Integralsatz von Gauß auf $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ an.

$\boxed{\textbf{78}}$ Bereiten Sie ein ca. 5-minütiges Referat vor über eine von Ihnen ausgewählte Anwendung des Integralsatzes von Gauß in der Physik.
(Natürlich ist z.B. auch in Aufgabe $\boxed{77}$ eine wichtige physikalische Anwendung „versteckt".)

---

[1] Achtung: In Aufgabe $\boxed{56}$(b) hatten wir die Vektorfelder auf ganz $\mathbb{R}^3$ „zur Verfügung" – ein ähnliches Argument funktioniert allgemeiner für sternförmige Gebiete – aber $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig. (Mehr dazu z.B. in Jänich's Buch *Mathematik 2, Geschrieben für Physiker*, Beispiel 2 in 29.1 und ganz 29.2.)