UE Analysis für Physiker∗innen II SS 22

Blatt 2

7 Skizzieren Sie die Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Normen $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$. Fügen Sie noch eine qualitative Skizze bezüglich

$$\|x\|_p := \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p} \qquad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$$

für einen Wert von $p \in]2, \infty[$ hinzu und machen damit $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ plausibel. Freiwillige Zusatzfrage: Können Sie diese Limesbeziehung auch beweisen?

(Hinweis: Fallunterscheidung 1. $|x_1| = |x_2|$ und 2. OBdA $|x_1| > |x_2|$.)

8 Skizzieren Sie jeweils die ersten Glieder der Folge (u_n), $u_n \in \mathbb{R}^2$, und berechnen Sie den Grenzwert für $n \to \infty$, falls er existiert:

(a) $u_n := \left(\frac{n-1}{n}\,,\ \frac{1}{n}\right)$, (b) $u_n := \left((1+\frac{1}{n})^n\,,\ \frac{\log n}{n}\right)$,

(c) $u_n := \left((-\frac{n+1}{n})^n\,, (-1)^{n+1}\right)$, (d) $u_n := \left(\frac{2^n}{3^n+1}\,,\ \sqrt[n]{n}\right)$.

9 Wir studieren nochmal die Folge (u_n) aus Teil (c) der vorigen Aufgabe.

(a) Ist die Folge beschränkt? Falls ja, geben Sie explizit eine Konstante C an, für die $\|u_n\| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Welcher Wert für C ist optimal?

(b) Besitzt sie konvergente Teilfolgen? Wenn ja, gegen welche Punkte konvergieren diese?

10 Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen anhand einer Skizze, ob sie beschränkt bzw. offen bzw. abgeschlossen bzw. kompakt ist:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ und } 1 < y < 2\}$,
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y = \frac{1}{x}\}$,
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1 \text{ und } |z| \le 3\}$,
(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z^2 \text{ und } 0 < z < 1\}$,
(e) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(\frac{1}{n}, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \frac{1}{n}\}$.

11 Sei V ein normierter Raum und $M \subseteq V$. Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen Innerem M°, Rand ∂M und Abschluss $\overline{M}$ von M: $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$ und $\overline{M} = M^\circ \cup \partial M$.

12 Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind wegzusammenhängend? Argumentieren Sie anhand von Skizzen.

(a) $\{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 < 4\}$,
(b) der Graph einer stetigen Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, d.h. $\{(x, f(x)) \mid a \le x \le b\}$,
(c) $\{(x, y) \mid y = 0 \text{ oder } (x > 0 \text{ und } y = 1/x)\}$.