UE Analysis für Physiker∗innen II SS 22

Blatt 3

$\boxed{13}$ Zeigen Sie, dass die in Aufgabe $\boxed{1}$ studierte Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist, aber in $(0,0)$ nicht einmal stetig ist. Wo sind die partiellen Ableitungen stetig?

$\boxed{14}$ Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitungen sowie deren Determinanten:

$$f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad g(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\boxed{15}$ Die *Helmholtz-Gleichung* für eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet $\Delta u + \lambda^2 u = 0$, wobei $\lambda \geq 0$ eine Konstante ist und $\Delta := \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ der Laplace-Operator. Zeigen Sie, dass für beliebigen *Wellenvektor* $k \in \mathbb{R}^n$ die beiden Funktionen $u_1(x) := \cos(\langle k, x\rangle)$ und $u_2(x) := \sin(\langle k, x\rangle)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ beliebig oft differenzierbar sind und die Helmholtz-Gleichung mit $\lambda = \|k\|$ erfüllen.

$\boxed{16}$ Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $c > 0$ vorgegeben. Wir definieren $u\colon \mathbb{R}^2 \to R$ durch

$$u(x,t) := f(x+ct) + g(x-ct) \quad (x, t \in \mathbb{R}).$$

Machen Sie qualitative Skizzen der Graphen von $x \mapsto f(x+ct)$ und $x \mapsto g(x-ct)$ für verschiedene Werte von $t \geq 0$ und zeigen Sie, dass u eine Lösung für folgendes Anfangswertproblem der eindimensionalen *Wellengleichung* ist:

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0, \quad u(x,0) = f(x) + g(x), \quad \partial_t u(x,0) = c(f'(x) - g'(x)).$$

$\boxed{17}$ Zeigen Sie jeweils die Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Ableitung:

(a) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ $\quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, y \in \mathbb{R})$, (b) für $a \in \mathbb{R}$: $g(x) = \|x\|^a$ $\quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

$\boxed{18}$ Skizzieren Sie den durch $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) := (1-\cos t)\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}$ beschriebenen Weg in $\mathbb{R}^2$, eine sogenannte *Kardioide*. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung in Abhängigkeit von t an, die wir jeweils als Tangentialvektor an die Kurve im Punkt $f(t)$ interpretieren. Zeichnen Sie die Tangentialvektoren für $t \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ ein.