Blatt 4

$\boxed{\textbf{19}}$ Formulieren Sie zunächst das Ergebnis von Aufgabe $\boxed{17}$(b) um in eine Aussage über den Gradienten $\nabla g(x)$ $(x \neq 0)$ zu erhalten. Verallgemeinern Sie dies nun und ermitteln den Gradienten einer *radialen* Funktion $h\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \mapsto F(\|x\|)$, wobei $F \in C^1(]0,\infty[)$ ist. Berechnen Sie schließlich auch Δh auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$\boxed{\textbf{20}}$ (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2x^2+6xy+3y^2$ im Punkt $a = (3,2)$ in Richtung des normierten Vektors v von a zum Punkt $(2,3)$ hin.

(b) Geben Sie eine Parameterdarstellung und Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,$f(x,y) = 2xy^2 + x + 3y$,s im Punkt $(2,-3,f(2,-3))$ an.

Bevor Sie Aufgaben $\boxed{21}$ bis $\boxed{23}$ bearbeiten, kann es hilfreich sein, die Aussagen in Aufgabe $\boxed{24}$ aus der Linearen Algebra anzuschauen bzw. zu wiederholen.

$\boxed{\textbf{21}}$ (a) Begründen Sie nun mit den Methoden der mehrdimensionalen Differentialrechnung, warum wir es in Aufgabe $\boxed{2}$(a) mit einem einzigen kritischen Punkt zu tun hatten, der ein Sattelpunkt ist.

(b) Bestimmen Sie lokale Extrema und Sattelpunkte von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + 1 - \cos x$.

$\boxed{\textbf{22}}$ (a) Untersuchen Sie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y + 4$, auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

(b) Gibt es ein globales Maximum oder Minimum von f?

$\boxed{\textbf{23}}$ (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2 + x^2y^2$ eine einzige kritische Stelle hat, die ein lokales Minimum ist.

(b) Ist das lokale Minimum auch ein globales? (Hinweis: $f(x,y) = x^2 + 2(x+y)^2 + x^2y^2$.)

$\boxed{\textbf{24}}$ Die folgenden Resultate sind im Zusammenhang mit der Hesse-Matrix einer skalarwertigen C^2-Funktion von zwei Variablen nützlich.

Begründen Sie für eine *reelle symmetrische* (2×2)-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$:

(i) A ist positiv definit[1] $\Leftrightarrow$ A hat nur positive Eigenwerte $\Leftrightarrow$ $a > 0$ und $\det A > 0$,

(ii) A ist indefinit[2] $\Leftrightarrow$ A hat einen negativen und einen positiven Eigenwert $\Leftrightarrow$ $\det A < 0$.

(Hinweise bzw. Wiederholungen: Seien λ_1, λ_2 die [reellen!] Eigenwerte von A und $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ eine zugehörige Orthonormalbasis aus Eigenvektoren; schreiben wir diese als Spaltenvektoren in eine Matrix $S = (w_1 w_2)$, dann ist S eine orthogonale Transformation mit der Eigenschaft $S^tAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; insbesondere ist also $\det A = \lambda_1\lambda_2$ und $\langle Av, v\rangle = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2$ für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit der [eindeutigen] Basisdarstellung $v = c_1 w_1 + c_2 w_2$.)

[1] D.h. $\langle Av, v\rangle > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$.
[2] D.h. es gibt Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $\langle Au, u\rangle < 0 < \langle Av, v\rangle$.