UE Analysis für Physiker∗innen II — SS 22

Blatt 5

25 Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2y^2 - x(x-1)^2$.

26 Zeigen Sie, dass basierend auf der Gleichung $x^2y + e^{2x} + z = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(0,1,-1)$ „die Variable x durch die anderen beiden Variablen y, z ausgedrückt werden kann", d.h. also $x = h(y,z)$ gilt, wobei h eine differenzierbare Funktion von einer Umgebung des Punktes $(1,-1) \in \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ ist. Berechnen Sie auch die partiellen Ableitungen von h an dieser Stelle.

27 Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = xz + \sin(xy) + \cos(xz) - 1$. Welche Variable lässt sich jeweils aus der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(0,1,1)$ durch die beiden anderen ausdrücken? Berechnen Sie die Ableitung(en) der so entstehenden Funktion(en) an der entsprechenden Stelle.

28 Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x y + \sin(xz) + \log(1+z) - 2 \\ \sin(x^2y) + y^2 + z^5 - 4 \end{pmatrix}$.
Welche zwei Variablen lassen sich aus den Gleichungen $f(x,y,z) = \binom{0}{0}$ in einer Umgebung des Punktes $(0,2,0)$ durch die dritte ausdrücken? Berechnen Sie auch die Ableitung(en) der so entstehenden Funktion(en) an der entsprechenden Stelle.

29 Bearbeiten Sie den ersten Teil von Aufgabe $\boxed{2}$(b) nun alternativ mittels Lagrange-Multiplikator. Verwenden Sie die Kompaktheit von S^1 für ein einfaches Argument, dass die errechneten kritischen Stellen tatsächlich Maxima bzw. Minima ergeben. (Als freiwillige „Fleißaufgabe" können Sie auch die modifizierten hinreichenden Bedingungen[1] überprüfen.)

30 Bestimmen Sie das Maximum und Minimum von $f(x,y,z) = x+y-z$ auf der Schnittmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ des elliptischen Zylinders $x^2 + 2y^2 = 1$ mit der Ebene $2x = z$. Überlegen Sie auch, warum M kompakt ist, und verwenden Sie dies wieder zur Vereinfachung des Arguments für ein tatsächliches Maximum und Minimum.

---

[1] Siehe VO bzw. Abschnitt 6.2. von §22 in Band 1 von Fischer-Kaul.