UE Analysis für Physiker∗innen II — SS 22

Blatt 7

$\boxed{\mathbf{37}}$ (a) Zeigen Sie, dass $f(x,y) := (x^2 - y)e^{-(x+y)}$ auf $]0,\infty[\times]0,\infty[$ integrierbar ist.
(b) Berechnen Sie $\int_{]0,\infty[^2} f(x,y)\,d(x,y)$.

$\boxed{\mathbf{38}}$ Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x,y,z) := xyz$ über $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1, 0 < y < x, 0 < z < x+y\}$.

$\boxed{\mathbf{39}}$ Es sei $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ das von den Geraden- und Kurvenstücken $y = x$, $y = 2$ und $xy = 1$ berandete beschränkte Gebiet und $f\colon \Omega_0 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,\cancel{z}) = y^2/x^2$. Berechnen Sie das zwischen $z = 0$ und dem Graphen von f liegende Volumen V.

In den folgenden drei Aufgaben benützen wir das sogenannte *Prinzip von Cavalieri*: Sei $K \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^n$ kompakt, dann kann das $(n+1)$-dimensionale Volumen von K als Integral über n-dimensionale Volumina geschrieben werden. Es gilt nämlich

$$V^{n+1}(K) = \int_a^b V^n(K_x)\,dx,$$

wobei $K_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \in K\}$ der Schnitt von K orthogonal zur x-Achse ist.[1]

$\boxed{\mathbf{40}}$ In Aufgabe $\boxed{6}$ hatten wir im Zusammenhang mit Rotationskörpern die elementare Volumsformel für den üblichen, geraden Kreiskegel mit Höhe $h > 0$ und Grundkreisradius $R > 0$ verifiziert. Mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri lässt sich auch das Volumen des sogenannten *schiefen Kreiskegels* K mit Grundkreis vom Radius R um den Mittelpunkt $(0,0,z_0)$ in der (y,z)-Ebene und Spitze in $(h,0,0)$ mühelos berechnen, d.h. (Skizze!)

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le h, y^2 + \left(z - \left(1 - \frac{x}{h}\right) z_0\right)^2 \le R^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2\right\}.$$

$\boxed{\mathbf{41}}$ Zeigen Sie wie sich mit dem Prinzip von Cavalieri das Volumen einer Kugel vom Radius R direkt aus dem Vorwissen über Kreisflächen berechnen lässt.
Bemerkung: Diese Methode kann in beliebige Dimensionen fortgesetzt werden und führt induktiv auf den Ausdruck $R^n\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ für das Volumen einer n-dimensionalen Kugel vom Radius R, wobei Γ die aus dem ersten Semester bekannte Gamma-Funktion bezeichnet.

$\boxed{\mathbf{42}}$ Es sei $h, R > 0$. Skizzieren Sie die folgenden beiden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ und berechnen Sie ihre Volumina: $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h, x^2 + y^2 \le R^2\}$ und

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h, x^2 + (y - \sin z)^2 \le R^2)\}.$$

[1] Für den Spezialfall von (achsenparallelen) Quadern ist das Resultat offensichtlich und intuitiv durch Quaderzerlegungen zumindest plausibel. Ein Beweis für die hier erwähnte ziemlich allgemeine Fassung findet sich z.B. im Buch *Analysis 3* von O. Forster, Springer, 7. Auflage 2012.