Blatt 8

$\boxed{\mathbf{43}}$ Berechnen Sie (a) $\displaystyle\int\limits_\Omega \frac{d^3x}{\|x-a\|}$, (b) $\displaystyle\int\limits_\Omega \frac{d^3x}{\|x-a\|^2}$ für $a \in \mathbb{R}^3$, $R > 0$ und

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \|x-a\| < R\}.$$

$\boxed{\mathbf{44}}$ Wir wollen das Volumen V zwischen den Funktionsgraphen für $g(x,y) = x^2 + 3y^2$ und $h(x,y) = 4 - y^2$ über dem Gebiet $\Omega_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$ berechnen.

(a) Zeigen Sie, dass $g(x,y) < h(x,y)$ für alle $(x,y) \in \Omega_0$ gilt und Gleichheit genau am Rand von Ω_0 auftritt. (Wir berechnen also gerade das Volumen jenes Körpers, der durch den parabolischen Zylinder $z = 4 - y^2$ und das elliptische Paraboloid $z = x^2 + 3y^2$ begrenzt wird.)

(b) Finden Sie in Analogie zu Polarkoordinaten eine geeignete Koordinatentransformation zwischen einem offenen Rechteck I und Ω_0. Wir benötigen also „elliptische Koordinaten“.

(c) Berechnen Sie V.

$\boxed{\mathbf{45}}$ (a) Es seien $a, b, c > 0$. Berechnen Sie die Fläche innerhalb einer Ellipse mit den Halbachsen a, b sowie das Volumen des Ellipsoids $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ jeweils durch Rückgriff auf die bekannten Werte für Kreisfläche und Kugelvolumen vermöge einer linearen Transformation der Koordinaten.

(b) Es bezeichne α_m das Volumen der m-dimensionalen (euklidischen) Einheitskugel. Begründen Sie zunächst ähnlich wie in (a), dass das Volumen einer m-dimensionalen Kugel vom Radius $r > 0$ gleich $r^m \alpha_m$ ist. Zeigen Sie dann mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri die Rekursionsformel $\alpha_n = \alpha_{n-1} \int_0^\pi \sin^n t \, dt$.

$\boxed{\mathbf{46}}$ Machen Sie sich plausibel, dass der Torus T aus Aufgabe $\boxed{35}$ auch als Bild von $B := [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, r]$ unter der Abbildung

$$\Phi(u,v,w) := \begin{pmatrix} w \sin u \\ (R + w\cos u)\sin v \\ (R + w \cos u) \cos v \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann und berechnen Sie das Volumen nun mittels Transformationssatz.

$\boxed{\mathbf{47}}$ Berechnen Sie die Länge der Kardioide aus Aufgabe $\boxed{18}$.

$\boxed{\mathbf{48}}$ Geben Sie für folgende Kurven jeweils die Parametrisierung nach der Bogenlänge an:

(a) Schraubenlinie mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $h > 0$, d.h. $\alpha\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}$,

(b) Logarithmische Spirale $\beta\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ mit $\beta(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.