# UE Analysis für Physiker∗innen II — SS 22

## Blatt 9

$\boxed{\mathbf{49}}$ (a) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_{\alpha_j} v \cdot ds$ $(j = 1, 2)$ für das Vektorfeld $v(x, y) = (x^2, xy)$ auf $\mathbb{R}^2$, wobei $\alpha_1$ die Strecke von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ bezeichnet und $\alpha_2$ der Streckenzug von $(0, 0)$ über $(1, 0)$ nach $(1, 1)$ ist.

(b) Berechnen Sie für das Vektorfeld $v(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0)$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ das Kurvenintegral über einen Kreis in der $(x, y)$-Ebene vom Radius $r > 0$ um den Ursprung. (Qualitativ ist $v$ das Magnetfeld eines konstanten Stromflusses entlang der $z$-Achse.)

$\boxed{\mathbf{50}}$ *Sektorformel von Leibniz:* Sei $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$ und $r \colon [\varphi_1, \varphi_2] \to ]0, \infty[$ stetig differenzierbar. Machen Sie (am einfachsten zunächst für $\varphi_2 \le \pi/2$) eine qualitative Skizze des Bildes der Kurve $\alpha \colon [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t) = r(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi)$ im $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie nun das Flächenstück $K$, das durch die beiden Strecken jeweils vom Ursprung zu den Punkten $\alpha(\varphi_1)$ und $\alpha(\varphi_2)$ sowie durch das Kurvenbild begrenzt wird.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $K$ mittels Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $v(x, y) = (-y, x)$ längs $\alpha$.

$\boxed{\mathbf{51}}$ Sind die in Aufgabe $\boxed{49}$ behandelten Vektorfelder konservativ? Erfüllen sie die Integrabilitätsbedingungen? Besitzen diese Vektorfelder auf gewissen Teilgebieten ein Potential?

$\boxed{\mathbf{52}}$ Ist das Vektorfeld $v(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2 + 1)$ auf $\mathbb{R}^3$ konservativ? Besitzt es ein Potential und wie sieht gegebenfalls so eines explizit aus? Berechnen Sie das Kurvenintegral von $v$ entlang einer stückweise glatten Kurve $\alpha$ vom Ursprung zum Punkt $(1, 1, 1)$.

$\boxed{\mathbf{53}}$ *Exakte Differentialgleichungen:* Seien $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ zwei $C^1$-Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, wobei $g(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gelte. Zeigen Sie: Wenn das Vektorfeld $v := (f, g)$ ein Potential $U$ besitzt, dann ist für jedes $(x_0, y_0) \in \Omega$ das Anfangswertproblem

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

lokal eindeutig lösbar und $y$ ist implizit gegeben durch die Gleichung $U(x, y) = U(x_0, y_0)$.

$\boxed{\mathbf{54}}$ Kann das Resultat der vorigen Aufgabe auf das folgende Anfangswertproblem angewendet werden? Wenn ja, dann versuchen Sie die Lösung mit dieser Methode zu bestimmen:

$$12xy + 3 + 6x^2y' = 0, \quad y(1) = 1.$$