

**61** Für die Lösung des Anfangswertproblems  $\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0$  in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  mit  $u(x, 0) = u_0(x)$  und  $\partial_t u(x, 0) = u_1(x)$  bezeichne  $\widehat{u}(y, t)$  die Fouriertransformation von  $x \mapsto u(x, t)$  bei festem  $t \in \mathbb{R}$  und ausgewertet bei  $y \in \mathbb{R}^n$ . Durch diese *räumliche Fouriertransformation* wird das ursprüngliche Anfangswertproblem umgewandelt in eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion  $t \mapsto \widehat{u}(y, t)$  mit zusätzlichem Parameter  $y \in \mathbb{R}^n$  und Anfangsbedingungen. Bestimmen Sie daraus  $\widehat{u}(y, t)$  in Abhängigkeit von  $\widehat{u}_0(y)$  und  $\widehat{u}_1(y)$ .

**62** Rechnen Sie im Fall  $n = 1$  nach, wie die konkrete Lösungsformel für die inhomogene Wellengleichung  $\partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t)$  ( $x \in \mathbb{R}, t > 0$ ) mit homogenen Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = 0$  und  $\partial_t u(x, 0) = 0$  aus dem Duhamel-Prinzip entsteht.

**63** (a) In der Situation der vorigen Aufgabe nehmen wir nun an, dass  $f$  außerhalb des Rechtecks  $R_\varepsilon := [-\varepsilon, \varepsilon] \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  verschwindet, also ein kurzes scharfes Signal bei  $x = 0$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  modelliert. Skizzieren Sie die Bereiche in  $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ , wo die Lösung  $u$  garantiert verschwindet bzw. wo allenfalls Werte ungleich null zu erwarten sind.

(b) Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen und  $f$  mittels zweidimensionaler Dirac-Distribution  $\delta_{(0,1)}$  modellieren, die konzentriert im Punkt  $(0, 1)$  ist. Glücklicherweise lässt sich  $\delta_{(0,1)}$  auch recht einfach als Maß interpretieren, nämlich durch

$$\int_A \delta_{(0,1)} := \begin{cases} 1 & (0, 1) \in A, \\ 0 & (0, 1) \notin A, \end{cases} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^2),$$

sodass wir die Formel aus Aufgabe **62** weiterhin verwenden können. Berechnen Sie die Werte von  $u$  nun durch geeignete Fallunterscheidung nach Teilbereichen von  $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ .

**64** Wir lösen das eindimensionale Cauchy-Problem für die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u + m^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times ]0, \infty[, \quad u(x, 0) = 0, \quad \partial_t u(x, 0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

mit Konstanten  $c, m > 0$  durch folgenden Trick: Die Funktion  $w(x_1, x_2, t) := e^{im \frac{x_2}{c}} u(x_1, t)$  mit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ , ist Lösung eines Anfangswertproblems für die zweidimensionale Wellengleichung. Entwickeln Sie daraus eine konkrete Integralformel für die Lösung  $u$ .

**65** Die Hyperfläche  $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  sei in der Form  $M = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t = \varphi(x)\}$  mit einer stetig differenzierbaren Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Zeigen Sie:

- (a)  $M$  ist charakteristisch für den Wellenoperator  $\square = \partial_t^2 - c^2 \Delta$ , falls  $\|\nabla \varphi\| = 1/c$  gilt.  
 (b) Im Falle, dass (a) zutrifft, beschreibt jede Kurve  $s \mapsto \gamma(s)$  im  $\mathbb{R}^n$  mit  $\dot{\gamma}(s) = c^2 \nabla \varphi(\gamma(s))$  eine geradlinige Bewegung mit Geschwindigkeit  $c$  (also einen „Lichtstrahl“).  
 (c) Eine Kurve wie in (b) mit  $\varphi(\gamma(0)) = 0$  schneidet für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die *Wellenfront*  $M_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid t = \varphi(x)\}$  im Punkt  $\gamma(t)$  senkrecht.

**66** (a) Bestimmen Sie unter allen Hyperebenen jene, die charakteristisch für den Wellenoperator  $\square = \partial_t^2 - c^2 \Delta$  in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge  $M$  der Funktion  $\Phi: \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x, t) = t^2 - \frac{\|x\|^2}{c^2}$  eine charakteristische Hyperfläche für den Wellenoperator in  $\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$  definiert. Stellen Sie  $M$  mit einer Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in der Form  $M = \{(x, t) \mid t = \varphi(x)\}$  dar und bestimmen Sie die Wellenfront  $M_t \subseteq \mathbb{R}^n$  für beliebiges  $t > 0$ .