PS Analysis 3 SS 2024

Blatt 1

$\boxed{\mathbf{1}}$ Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist I eine beliebige Indexenge und $A_i \subseteq X$ abgeschlossen für $i \in I$, dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen in X.

(b) Zu $B \subseteq X$ gibt es eine kleinste abgeschlossene Menge $\overline{B} \subseteq X$ mit $B \subseteq \overline{B}$. Die Teilmenge $\overline{B}$ heißt der *Abschluss* von B. Natürlich ist B genau dann abgeschlossen, wenn $B = \overline{B}$ gilt.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ und $z \in X$. Zeigen Sie:

(a) $z \in \overline{A}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ stets $B_\varepsilon(z) \cap A \neq \emptyset$ gilt,

(b) $z \in \overline{A}$ genau dann, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gibt mit $a_n \to z$,

(c) $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$, wobei $d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$ gesetzt wird.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (a) Überlegen Sie sich zunächst kurz, warum eine Teilmenge eines topologischen Raumes genau dann offen ist, wenn sie Umgebung für jeden ihrer Punkte ist.

(b) Seien nun X und Y topologische Räume. Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(i) f ist stetig,

(ii) Urbilder unter f von offenen Mengen in Y sind offen in X,

(ii) Urbilder unter f von abgeschlossenen Mengen in Y sind abgeschlossen in X.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Seien X und Y topologische Räume, $f\colon X \to Y$ und $K \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) X kompakt und K abgeschlossen $\implies$ K kompakt,

(b) K kompakt und f stetig $\implies$ $f(K)$ kompakt.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (a) Seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig.
Zeigen Sie: X zusammenhängend $\implies$ $f(X)$ zusammenhängend.

(b) Zeigen Sie, dass Intervalle in $\mathbb{R}$ zusammenhängend sind.
Bemerkung: Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich zeigen, dass A zusammenhängend ist genau dann, wenn $[x, y] \subseteq A$ gilt für alle $x, y \in A$ mit $x < y$. Diese Eigenschaft charakterisiert die Intervalle, also sind die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Diskutieren Sie die Details aus Beispiel 1.1 im VO-Skriptum zu den Überlegungen, dass mit den dortigen Bezeichnungen $B = \overline{A}$ gilt und B zusammenhängend ist. Was ist eine intuitive Begründung (Analysis 1) dafür, dass B nicht wegzusammenhängend sein kann?