PS Analysis 3 — SS 2024

Blatt 2

$\boxed{7}$ Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $\varphi\colon I \to J$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Ein (allfälliger) Randpunkt von I wird auf einen Randpunkt von J abgebildet.
(Hinweis: Ist $a \in I$ ein Randpunkt, dann ist auch $I \setminus \{a\}$ ein Intervall, also zusammenhängend.)

(b) φ ist streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. (φ stetig und injektiv genügt.)

$\boxed{8}$ Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig und bijektiv. Zeigen Sie:

(a) Im Allgemeinen muss die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon Y \to X$ nicht stetig sein.

(b) Ist X kompakt, dann ist auch Y kompakt und f ein Homöomorphismus. (Hinweis: Hier hilft eine Zwischenüberlegung, dass kompakte Teilmengen metrischer Räume abgeschlossen sind; wobei Sie verwenden dürfen/sollen, dass Kompaktheit in metrischen Räumen durch Folgen bschrieben werden kann.)

$\boxed{9}$ Zeigen Sie, dass die stetig parametrisierte Kurve $c\colon]0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = (t, \sin(1/t))$ nicht rektifizierbar ist. Wie sieht es mit den Kurven $c_k\colon]0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = (t, t^k \sin(1/t))$ und $k = 1$ oder 2 aus? (Für den zweiten Teil genügen Plausibilitätsbetrachtungen.)

$\boxed{10}$ Auf den kompakten Intervallen $I = [a,b]$ und $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ seien $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig mit derselben Bildmenge $c(I) = \tilde{c}(\tilde{I})$ in $\mathbb{R}^n$. Begründen Sie, warum in diesem Fall $\tilde{c}$ eine stetige Reparametrisierung von c ist.

$\boxed{11}$ Leiten Sie Formeln für die Bogenlängenfunktion $t \mapsto L_a^t(c)$ in folgenden Fällen her:

(a) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ beschreibe durch $c(t) := (t, f(t))$ den Graphen von f im $\mathbb{R}^2$. Was ergibt sich konkret im Beispiel der Kettenlinie mit $a = 0$ und $f(t) = \cosh(t)$?

(b) Es sei $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ die C^1-parametrisierte Kurve mit $c(t) := r(t)(\cos t, \sin t)$. Was erhalten wir im Falle der spiralförmigen Kurve mit $a = 0$ und $r(t) = e^{-t}$ und im Limes $b \to \infty$?

$\boxed{12}$ Einfache Formeln entweder für die Kurvenparametrisierung oder für die Bogenlängenfunktion garantieren nicht, dass die anderen Größen explizit ausgerechnet werden können:

(a) Sei $a > b > 0$. Zeigen Sie, dass durch $c(t) := (a \cos t, b \sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ eine Ellipse in Hauptlage beschrieben wird. Ihr Umfang $L_0^{2\pi}(c)$ lässt sich aber bestenfalls durch einen Integralausdruck $a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2(t)}\, dt$ mit geeignetem $0 < \varepsilon < 1$ angeben

(b) Die sowohl in der Beugungstheorie als auch im Straßenbau auftretende *Cornu-Spirale* oder *Klothoide* $c\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ hat Komponentenfunktionen $c = (c_1, c_2)$, die durch Fresnel-Integrale gegeben sind:

$$c_1(t) := \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau \quad \text{und} \quad c_2(t) := \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau.$$

Dennoch lassen sich die Bogenlängenfunktion $t \mapsto L_0^t(c)$ sowie auch die Größe $\kappa_0(t) := \det(c'(t), c''(t))$ sehr einfach explizit berechnen. (Letztere werden wir auf dem nächsten Aufgabenblatt mit dem Begriff der Krümmung in Zusammenhang bringen. Man kann übrigens zeigen, dass sich $\lim_{t\to\infty} c(t) = (1/2, 1/2)$ im $\mathbb{R}^2$ ergibt.)