PS Analysis 3 SS 2024

Blatt 3

$\boxed{\textbf{13}}$ Am Beginn von 1.5 im VO-Skriptum wird beschrieben, wie eine C^∞-Parametrisierung der „Ecke" $E := \{(x, y) \mid (0 \leq x \leq 1 \text{ und } y = 0) \text{ oder } (x = 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 1)\}$ im $\mathbb{R}^2$ konstruiert werden kann. Warum kann E nicht als Bildmenge einer regulär parametrisierten C^1-Kurve auftreten?

Prüfen Sie in den folgenden beiden Aufgaben, ob es sich um regulär parametrisierte Kurven handelt. Machen Sie Skizzen der Kurvenbilder und berechnen Sie die Bogenlängenfunktion.

$\boxed{\textbf{14}}$ (a) Die Schraubenlinie $c\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $c(t) := (r\cos t, r\sin t, ht)$ mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $h > 0$.

(b) Die Zykloide $c\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Machen Sie in Ihrer Skizze auch plausibel, warum dies die Bewegungskurve eines peripheren Punktes eines auf der horizontalen Achse nach rechts rollenden Rades mit Einheitsradius beschreibt.

$\boxed{\textbf{15}}$ Hier sind Kurven im $\mathbb{R}^2$ „in Polarkoordinaten" $c(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$ gegeben:

(a) Die Archimedische Spirale mit $r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $r(t) := dt$, wobei $d > 0$.

(b) Die Kardioide mit $r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $r(t) = \rho(1 + \cos t)$, wobei $\rho > 0$.

$\boxed{\textbf{16}}$ Sei $c = (c_1, c_2)\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^2. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $s \in [0, L]$ ist der Vektor $n(s) := (-c_2'(s), c_1'(s))$ normiert und orthogonal zum Tangentialvektor $c'(s)$, und zwar „in Bewegungsrichtung gesehen" vom Tangentialvektor um $90°$ nach links gedreht.

(b) Für jedes $s \in [0, L]$ steht $c''(s)$ senkrecht auf $c'(s)$ und es gibt eine eindeutige reelle Zahl $\kappa_0(s)$, sodass $c''(s) = \kappa_0(s)\, n(s)$ gilt. Die dadurch bestimmte Funktion $\kappa_0\colon [0, L] \to \mathbb{R}$ ist stetig und lässt sich durch $\kappa_0(s) = \det(c'(s), c''(s))$ beschreiben.

Die Zahl $\kappa_0(s)$ heißt *Krümmung* von c im Punkt $c(s)$. Für $\kappa_0(s) > 0$ krümmt sich an dieser Stelle die Kurve also „in Bewegungsrichtung gesehen" nach links, für $\kappa_0(s) < 0$ nach rechts. Zeigen Sie, dass Geradenstücke überall verschwindende Krümmung haben.

$\boxed{\textbf{17}}$ Sei $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte C^2-Kurve und $\tilde{c} = c \circ \varphi\colon [0, L] \to \mathbb{R}^2$ die Reparametrisierung nach der Bogenlänge. Leiten Sie eine Formel für die Krümmung $\kappa(t) := \kappa_0(\varphi^{-1}(t))$ im Kurvenpunkt $c(t)$ her, die ohne explizite Kenntnis der Parametrisierung nach der Bogenlänge verwendet werden kann.

$\boxed{\textbf{18}}$ (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $c\colon [a, b] \to U$ eine C^1-Kurve und $Z\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf U. Zeigen Sie die Abschätzung $\left|\int_c Z\right| \leq L(c) \sup_{a \leq t \leq b} \|Z(c(t))\|$.

(b) Es sei $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig und $Z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $Z(x, y) := f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)(-y, x)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von Z über den Kreis $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := r(\cos t, \sin t)$ mit Radius $r > 0$.