Blatt 4

$\boxed{\textbf{19}}$ Für $n \geq 3$ könn(t)en wir *Polarkoordinaten* $(r, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2})$ im $\mathbb{R}^n$ betrachten:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\ \cdots\ \cos\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2},\\
x_2 &= r\sin\varphi\cos\theta_1\cos\theta_2\ \cdots\ \cos\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2},\\
x_3 &= \qquad r\sin\theta_1\cos\theta_2\ \cdots\ \cos\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2},\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \ddots\\
x_{n-1} &= \qquad\qquad\qquad\qquad r\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2},\\
x_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r\sin\theta_{n-2}.
\end{aligned}$$

Aber gut ... wir „begnügen" uns in dieser Aufgabe mit dem Fall $n = 3$, d. h. wir wiederholen die Kugelkoordinaten, wobei wir θ statt θ_1 schreiben. Interpretieren Sie die Koordinaten φ und θ bei festem $r > 0$ geographisch/geometrisch. Zeigen Sie, dass durch Einschränkung auf Tripel $(r, \varphi, \theta) \in U :=]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ aus obigen Formeln ein Diffeomorphismus Φ von U auf eine offene Teilmenge V des $\mathbb{R}^3$ entsteht und bestimmen Sie V explizit.
(Im n-dimensionalen Analogon nehmen wir halt $U =]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^{n-2}$.)

$\boxed{\textbf{20}}$ Wir betrachten die offenen Teilmengen $U := \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, s > 0, r + s < 3\}$ und $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^3 + y^3 < 3xy\}$ des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\overline{\Phi}\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^2$, $\overline{\Phi}(r, s) := (r^{2/3}s^{1/3}, r^{1/3}s^{2/3})$ ergibt durch Einschränkung auf U einen Diffeomorphismus $\Phi\colon U \to V$, aber $\overline{\Phi}$ ist nicht injektiv.

(b) Der Rand $\partial V := \overline{V} \setminus V$ von V wird beschrieben durch die Gleichung $x^3 + y^3 = 3xy$ unter der Bedingung $x \geq 0$, $y \geq 0$. Vermöge des Ansatzes $y = tx$ mit $t \geq 0$ kann ∂V als Bild einer regulär parametrisierten Kurve $c\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ beschrieben werden und es gilt $\lim_{t\to\infty} c(t) = c(0)$. (Bemerkung: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 = 3xy\}$ heißt *Kartesisches Blatt*.)

$\boxed{\textbf{21}}$ Es seien $E_\pm := (\pm 1, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $C := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid d(z, E_-)\cdot d(z, E_+) = 1\}$. Offensichtlich ist C symmetrisch bezüglich beider Koordinatenachsen. Zeigen Sie:

(a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\}$ und $|y| \leq |x|$ für alle $(x, y) \in C$.

(b) Gemäß (a) ist der Ansatz $y = x\sin t$ sinnvoll und liefert C als Bild einer Kurve, der sogenannten *Lemniskate von Bernoulli*. (Ist sogar regulär parametrisiert, muss aber nicht nachgerechnet werden.) Für $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ ist die entsprechende Parametrisierung $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ injektiv und erfüllt $c(I) = C$, wobei aber $\lim_{t\downarrow -\frac{\pi}{2}} c(t) = c(\frac{\pi}{2}) = \lim_{t\uparrow \frac{3\pi}{2}} c(t)$ gilt.

$\boxed{\textbf{22}}$ Gegeben ist die 1-Form $\alpha = -x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2$ auf $\mathbb{R}^2$ und $0 < \varphi < \pi/2$. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale $\int_c \alpha$:

(a) c der einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis,

(b) $c\colon [0, \varphi] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = e^t(\cos t, \sin t)$,

(c) c als stückweise C^1-Kurve, die zuerst die Verbindungsstrecke von $(1, 0)$ nach $(0, 0)$ durchläuft und danach weiter geradlinig nach $e^\varphi(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = (x^2 + y^2)/2$. Berechnen Sie das Gradientenvektorfeld $Z := \nabla f$ sowie die 1-Form $\alpha := df$ auf $\mathbb{R}^2$ und auch die Pullback-1-Form $F^*\alpha$ von α unter der glatten Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

$\boxed{\mathbf{24}}$ Auf $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ betrachten wir das Vektorfeld $Z(x) := -x/\|x\|^3$ und die zugehörige 1-Form α, d. h. $\alpha(x,v) = \langle Z(x), v\rangle$ für $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie $\alpha = \sum_{j=1}^3 \alpha_j\, dx_j$ konkret an und berechnen Sie:

(a) das Kurvenintegral von α über die elliptische Schraubenlinie $c\colon [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $c(t) = (a\cos t, b\sin t, ht)$, wobei a, b, h positive Konstanten sind,

und

(b) die Pullback-1-Form $F^*\alpha$ von α unter der glatten Abbildung $F\colon\,]0,\infty[\, \times \mathbb{R}^2 \to U$ mit $F(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$.

(Überlegen Sie eventuell zunächst, ob es eine Funktion $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ mit $df = \alpha$ gibt, und wie diese Information in (a) und (b) nützen kann.)