Blatt 5

$\boxed{\mathbf{25}}$ Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $Z = \nabla f$ ein Gradientenfeld auf U mit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Angenommen die C^2-Kurve $c\colon [a,b] \to U$ von $p := c(a)$ nach $q := c(b)$ ist eine Lösung von

$$c''(t) = Z(c(t)) \quad (a < t < b),$$

dann gilt der Energiesatz

$$\frac{1}{2}\langle c'(t), c'(t)\rangle\Big|_a^b = f(q) - f(p).$$

$\boxed{\mathbf{26}}$ Für eine stetig differenzierbare Kurve $c\colon [a,b] \to U$ in einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ setzen wir

$$\int_c f(z)\,dz := \int_a^b f(c(t))c'(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(c(t))c'(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(c(t))c'(t))\,dt.$$

(a) Sei $c(t) = c_1(t) + ic_2(t)$ mit reellwertigen Funktionen c_1, c_2 und c auch als Kurve $t \mapsto (c_1(t), c_2(t))$ im $\mathbb{R}^2$ aufgefasst, außerdem $u(x,y) := \mathrm{Re}\, f(x+iy)$ und $v(x,y) := \mathrm{Im}\, f(x+iy)$. Bestimmen Sie reelle 1-Formen $\alpha = \alpha_1\,dx + \alpha_2\,dy$ und $\beta = \beta_1\,dx + \beta_2\,dy$ auf U, sodass wir folgende Gleichung erhalten

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c \alpha + i\int_c \beta.$$

(b) Nun sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $c\colon [a,b] \to U$ eine geschlossene C^1-Kurve. Was ergibt obige Formel in dieser Situation für die Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 1/z$? (Hinweis: Finden Sie $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\alpha = dg$ und beachten Sie die Gestalt und Eigenschaften der 1-Form η aus 1.11 und 1.12 des Skriptums bzw. der VO.)

$\boxed{\mathbf{27}}$ Wir definieren die *Windungszahl* $w_z(c)$ einer stetigen geschlossenen Kurve $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ bezüglich eines Punktes $z \in \mathbb{R}^2 \setminus c([a,b])$ als Windungszahl der Kurve $c_z\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ mit $c_z(t) := c(t) - z$, d. h. $w_z(c) := w_0(c_z)$. Zeigen Sie durch Auffinden einer geeigneten Homotopie, dass für zwei Punkte z und u aus derselben Bogenkomponente von $\mathbb{R}^2 \setminus c([a,b])$ stets $w_z(c) = w_u(c)$ gilt.

$\boxed{\mathbf{28}}$ Wir studieren nochmals die Lemniskate C aus Aufgabe $\boxed{21}$.

(a) Mit der injektiven Parametrisierung $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ gemäß $\boxed{21}$(b) erhalten wir eine stetige Bijektion $I \to C$. Kann diese ein Homöomorphismus sein? (Hinweis: Betrachten Sie die Zusammenhangskomponenten nahe $\frac{\pi}{2} \in I$ bzw. $0 \in c(I)$ nach Entfernung von $\frac{\pi}{2}$ bzw. von 0.)

(b) Nun werde C mittels der stetigen Ausdehnung $\overline{c}\colon \overline{I} \to \mathbb{R}^2$ von c als geschlossene Kurve parametrisiert — es ist ja $\overline{c}(-\pi/2) = \overline{c}(3\pi/2) = c(\pi/2)$. Wie lauten die Windungszahlen in den verschiedenen Bogenkomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus C$? (Anschauliche Argumentation genügt.)

$\boxed{\mathbf{29}}$ Es sei $c\colon [0,L] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^3-Kurve mit *Krümmung* $\kappa_0(s) := \|c''(s)\| \neq 0$ für alle $s \in [0,L]$. Für jedes $s \in [0,L]$ definieren wir den *Hauptnormalenvektor* $h(s) := c''(s)/\kappa_0(s)$ sowie den *Binormalenvektor* $b(s) := c'(s) \times h(s)$. Zeigen Sie, dass das Tripel $(c'(s), h(s), b(s))$ jeweils eine geordnete Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet und mit der *Torsion* $\tau_0(s) := -\langle b'(s), h(s)\rangle$ die *Frenet-Gleichungen*

$$(c')'(s) = \kappa_0(s)h(s), \quad h'(s) = -\kappa_0(s)c'(s) + \tau_0(s)b(s), \quad b'(s) = -\tau_0(s)h(s) \quad (0 \leq s \leq L)$$

gelten.

$\boxed{\mathbf{30}}$ Wir nennen einen wegzusammenhängenden topologischen Raum Y *einfach zusammenhängend*, falls es ein $y_0 \in Y$ gibt, sodass jede geschlossene stetige Kurve $c\colon [a,b] \to Y$ mit $c(a) = y_0 = c(b)$ *nullhomotop mit fixem Anfangs- und Endpunkt* ist, d. h. es gibt eine Homotopie $H\colon [a,b] \times [0,1] \to Y$ von c nach der konstanten Kurve y_0 mit der Zusatzeigenschaft $H(a,s) = y_0 = H(b,s)$ für alle $s \in [0,1]$. (Bemerkung: In diesem Fall lässt sich zeigen, dass dann auch jede geschlossene Kurve in Y mit einem beliebigen Anfangs- und Endpunkt $z_0 \in Y$ nullhomotop mit fixem Anfangs- und Endpunkt ist.)

(a) Machen Sie durch Skizzen plausibel: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ is offen und zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend. $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist offen und einfach zusammenhängend.

(b) Zeigen Sie: Sternförmige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind einfach zusammenhängend.

(c) Zeigen Sie: Eine offene zusammenhängende Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, die homöomorph zu einer (offenen) sternförmigen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, ist einfach zusammenhängend.