Blatt 6

$\boxed{\mathbf{31}}$ Zeigen Sie:

(a) Ist X homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $B^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f\colon X \to X$ stetig, dann hat f einen Fixpunkt. (Bemerkung zur Anwendbarkeit: Es lässt sich z.B. recht elementar zeigen, dass jede kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die Umgebung zumindest eines ihrer Punkte ist [d.h. sie hat nichtleeres Inneres], homöomorph zur abgeschlossenen euklidischen Einheitskugel B^n ist.)

(b) Ist $g\colon B^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig und $\langle g(x), x\rangle \geq 0$ für alle $x \in S^1$, dann hat das nichtlineare Gleichungssystem $g(x) = 0$ eine Lösung $x \in B^2$. (Hinweis: Indirekt angenommen $g(x) \neq 0$ für alle $x \in B^2$, dann betrachte $f(x) := -g(x)/\|g(x)\|$.)

$\boxed{\mathbf{32}}$ Sind die folgenden 1-Formen auf $U \subseteq \mathbb{R}^2$ geschlossen? Sind sie exakt? Wenn ja, geben Sie eine Stammfunktion an.

(a) $e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy$ auf $U = \mathbb{R}^2$,

(b) $(x^2 + 2y)\, dx + (2x - y^3)\, dy$ auf $U = \mathbb{R}^2$,

(c) $x \log y\, dx + y \log x\, dy$ auf $U =]0, \infty[^2$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ Sind die folgenden 1-Formen auf $U \subseteq \mathbb{R}^3$ geschlossen? Sind sie exakt? Wenn ja, geben Sie eine Stammfunktion an.

(a) $x^2 y\, dx + ze^x\, dy + xy \log z\, dz$ auf $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$,

(b) $(x + z)\, dx - (y + z)\, dy + (x - y)\, dz$ auf $U = \mathbb{R}^3$,

(c) $(x + 2z)\, dx - (y + z)\, dy + 2(x - y)\, dz$ auf $U = \mathbb{R}^3$.

In den verbleibenden Aufgaben sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig auf der offenen zusammenhängenden Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir ordnen der skalaren Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ die Differentialform $\omega = f(x, y)\, dx - dy$ zu. Dies wird nämlich nahegelegt bei formaler Ersetzung von y' durch $\frac{dy}{dx}$ und „anschließender Multiplikation" der Gleichung $f(x, y) - \frac{dy}{dx} = 0$ mit dx.

$\boxed{\mathbf{34}}$ Sei $I =]a, b[$ und $u\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, d.h. u ist C^1 und $(t, u(t)) \in U$ sowie $u'(t) = f(t, u(t))$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie: Die zugeordnete C^1-Kurve $c\colon I \to U$ mit $c(t) := (t, u(t))$ ist regulär parametrisiert und erfüllt $c^*\omega = 0$.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c = (c_1, c_2)\colon J \to U$ eine regulär parametrisierte Kurve mit der Eigenschaft $c^*\omega = 0$. Zeigen Sie: Durch $s \mapsto c_1(s)$ erhalten wir einen C^1-Diffeomorphismus $J \to c_1(J) =: I$ mit Inverser $\tau\colon I \to J$ und $u(t) := c_2(\tau(t))$ liefert eine Lösung $u\colon I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung.

$\boxed{\mathbf{36}}$ (a) Sei α eine exakte 1-Form auf U mit Stammfunktion $h \in C^1(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Für eine C^1-Kurve c in U gilt $c^*\alpha = 0$ genau dann, wenn $h \circ c$ konstant ist.

(b) Eine stetige Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in U$ heißt *integrierender Faktor* für die Differentialgleichung bzw. für ω, falls $\alpha := g \cdot \omega$ eine exakte 1-Form ist. Warum ist für eine C^1-Kurve c in U genau dann $c^*\omega = 0$ erfüllt, wenn $c^*\alpha = 0$ gilt? Welche Lösungsstrategie ergibt sich daraus für die Differentialgleichung?