

Bitte beachten (wurde in meinen damaligen VO klar kommuniziert): Der gesamte Analysis-Zyklus ist stark an die (2005-2008 verfügbaren Ausgaben der) Bücher von Forster angelehnt, mit Zusätzen aus Heuser und Rudin im dritten Semester.

## Analysis-Reste – Teil 1

Günther Hörmann & David Langer

(was nach dem Wintersemester 2008/09 übrig bleibt: Material aus ehem. A2, das nicht in den Bachelor-Modulen Einf. i. d. Analysis (1.Sem.) oder Analysis (2.Sem) unterkam; entspricht Teilen des neuen Moduls Höhere Analysis und elementare Differentialgeometrie (3.Sem.))



# Inhalt

<b>VIII. KURVEN UND FLÄCHEN — UNTERMANNIGFALTIGKEITEN DES <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>1</b>
21. Wege und Kurven . . . . .	1
22. Vektorfelder, 1-Formen und Kurvenintegrale . . . . .	8
23. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25



# VIII KURVEN UND FLÄCHEN — UNTERMANNIGFALTIGKEITEN DES $\mathbb{R}^n$

## §21. Wege und Kurven

### 21.1. Definition

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall.

- 1) Eine stetige Abbildung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Weg*. Ist  $I = [a, b]$ , dann ist  $\gamma$  ein *Weg von*  $p := \gamma(a)$  *nach*  $q := \gamma(b)$ .
- 2) Es sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbarer Weg, dann heißt  $\dot{\gamma}(t) := D\gamma(t)$  *Tangentenvektor* an  $\gamma$  im Punkt  $\gamma(t)$ . Falls  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  ist, so heißt  $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$  *Tangenteneinheitsvektor*.
- 3) Ein Weg  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *regulär*, wenn  $\gamma$  stetig differenzierbar ist und  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  gilt für alle  $t \in I$ .
- 4) Ein Weg  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *stückweise regulär*, wenn  $\gamma$  stetig ist und es eine Zerlegung  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$  von  $I$  gibt, sodass die Einschränkungen  $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$  (für  $j = 0, \dots, N-1$ ) jeweils regulär sind.

**Kinematische Interpretation:** In einer gängigen physikalischen Interpretation von Wegen betrachten wir  $I$  als Zeitintervall,  $\gamma(t)$  als Ort eines Teilchens (oder eines Körperschwerpunktes) zur Zeit  $t$ ,  $\dot{\gamma}(t)$  als (momentanen) Geschwindigkeitsvektor (engl. *velocity*) und  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  als (Betrag der momentanen) Geschwindigkeit (engl. *speed*) zur Zeit  $t$ .

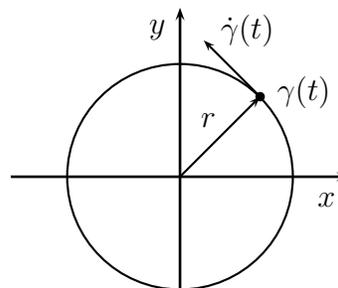
## 21.2. Beispiele

- 1.) Seien  $a, v \in \mathbb{R}^n$ , dann beschreibt  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma(t) = a + t \cdot v$  die Gerade durch  $a$  in Richtung  $v$ . Es ist  $\dot{\gamma}(t) = v$  und somit gilt:  $\gamma$  ist regulär  $\iff v \neq 0$ .

- 2.) Es sei  $r > 0$ ;  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$  beschreibt einen Kreis vom Radius  $r$  um den Ursprung. Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t) \perp \gamma(t).$$

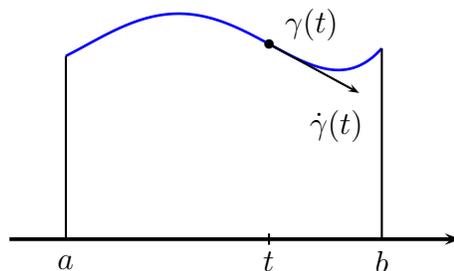
Insbesondere ist  $\gamma$  regulär, weil  $\|\dot{\gamma}(t)\| = r > 0$  ist.



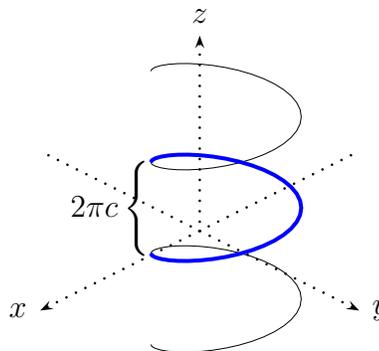
- 3.) Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$ .

Dann ist  $\gamma(I)$  gerade der Graph von  $f$ .

Wegen  $\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$  ist  $\gamma$  stets regulär.



- 4.) Es seien  $r > 0$  und  $c > 0$ ; der reguläre Weg  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ct)$ ,  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschreibt eine Schraubenlinie mit Ganghöhe  $2\pi c$ .

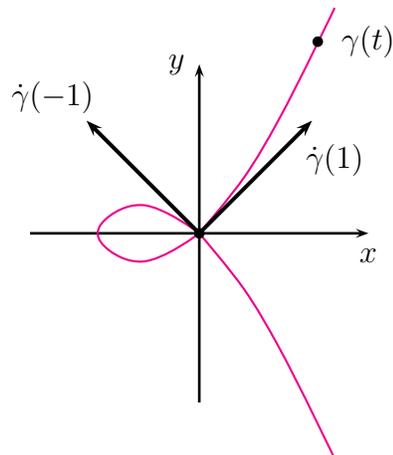


5.) Für  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$  ist

$$\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2 - 1)$$

und daher  $\gamma$  regulär.

$\gamma$  ist nicht injektiv: es gibt einen so genannten *Doppelpunkt* in  $(0, 0) = \gamma(-1) = \gamma(1)$ , wobei  $\dot{\gamma}(-1) = (-2, 2)$  und  $\dot{\gamma}(1) = (2, 2)$ .



6.) Die Neilsche Parabel  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wobei  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ ; es ist

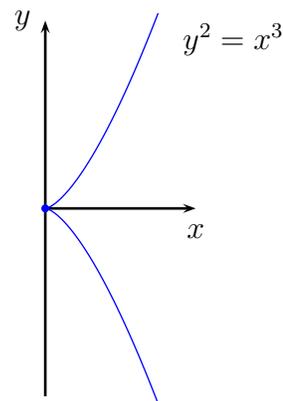
$$\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2),$$

daher  $\dot{\gamma}(0) = (0, 0)$  und  $\gamma$  nicht regulär.

Dieselbe Bildmenge  $C := \gamma(\mathbb{R})$  wird durch den stückweise regulären Weg

$$\alpha(t) = \begin{cases} (-t, -|t|^{3/2}) & t < 0, \\ (t, t^{3/2}) & t \geq 0 \end{cases}$$

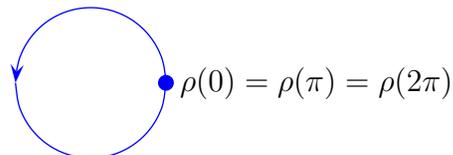
erzeugt.



7.)  $\sigma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma(\tau) := (r \cos(2\tau), r \sin(2\tau))$  beschreibt wie Beispiel 2.) ebenfalls einen Kreis vom Radius  $r$  um den Ursprung, d.h. es gilt  $\sigma([0, \pi]) = \gamma([0, 2\pi])$ .

Die Durchlaufgeschwindigkeit ist aber wegen  $\dot{\sigma}(\tau) = 2 \cdot \dot{\gamma}(2\tau)$  verdoppelt.

8.) Der Weg  $\rho: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\rho(\tau) := (r \cos(2\tau), r \sin(2\tau))$  beschreibt denselben Kreis wie in den Beispielen 2.) und 7.). Allerdings wird nun die Bildmenge zweimal durchlaufen.



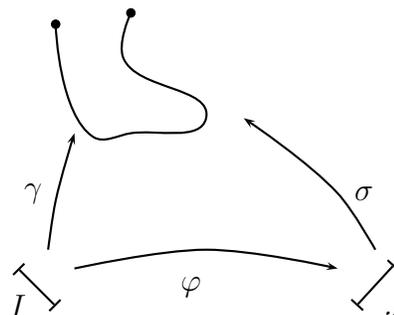
### 21.3. Definition

Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle.

1.) Eine *zulässige Parametertransformation* ist eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi: I \rightarrow J$  mit  $\varphi'(t) > 0$  für alle  $t \in I$ .

2.) Zwei Wege  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen *äquivalent*, wenn es eine zulässige Parametertransformation  $\varphi: I \rightarrow J$  gibt mit  $\sigma \circ \varphi = \gamma$ ; wir schreiben dafür auch kurz  $\gamma \sim \sigma$ .

Es ist leicht zu zeigen (nämlich durch entsprechende Verknüpfungen bzw. Inverse von Parametertransformationen), dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege im  $\mathbb{R}^n$  definiert wird.

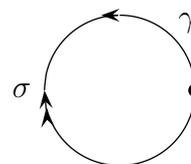
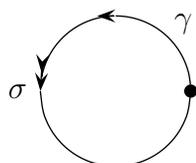


3.) Eine *orientierte stückweise reguläre Kurve*  $C$  ist eine Äquivalenzklasse von stückweise regulären Wegen. Jeder Repräsentant  $\gamma$  von  $C$  heißt eine *Parametrisierung* von  $C$ ; es entspricht dann also  $C$  der Klasse aller Wege  $\sigma$  mit  $\sigma \sim \gamma$ .

### 21.4. Bemerkung

1.) Die Bedingung  $\varphi'(t) > 0$  bedeutet geometrisch, dass  $\gamma$  und  $\sigma$  im selben Sinn durchlaufen werden.

Im Fall  $\varphi'(t) < 0$  dreht sich die Orientierung gerade um, wobei die Bildmengen nach wie vor gleich sind.



2.) Wegen  $\varphi'(t) > 0$  (für  $t \in I$ ) ist eine zulässige Parametertransformation also streng monoton wachsend und stetig differenzierbar invertierbar (also ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $I \rightarrow \varphi(I)$ ). Es gilt  $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} > 0$ , daher ist auch  $\varphi^{-1}$  eine zulässige Parametertransformation  $\varphi(I) \rightarrow I$ .

3.) Für die Änderung der Tangentialvektoren differenzierbarer Wege  $\gamma, \sigma$  unter einer Parametertransformation gilt

$$\dot{\gamma}(t) = (\sigma \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot \dot{\sigma}(\varphi(t)).$$

## 21.5. Definition

Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stückweise regulärer oder stetig differenzierbarer (nicht notwendig regulärer) Weg. Dann heißt

$$(21.1) \quad L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

die *Bogenlänge* von  $\gamma$ .

## 21.6. Bemerkung

- 1.)  $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$  ist stetig bis auf höchstens endlich viele Sprungstellen, also Riemann-integrierbar auf  $[a, b]$ .
- 2.) In der kinematischen Interpretation ist  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  der Betrag der Momentangeschwindigkeit und somit entspricht  $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$  dem zurückgelegten Weg.
- 3.) Man kann zeigen:  $L(\gamma)$  ist der Limes der Gesamtlängen eingeschriebener Polygonzüge; dies ergibt Riemann-Summen für das Integral in (21.1) und führt auf den Begriff des *rektifizierbaren* Weges (vgl. [For05, §4]).
- 4.) Es sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  das Geradenstück  $\gamma(t) = a + t \cdot (b - a)$  zwischen  $a$  und  $b$  im  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $L(\gamma) = \int_0^1 \|b - a\| dt = \|b - a\|$ ; d.h. für gerade Strecken ist die Bogenlänge genau die euklidische Länge.



## 21.7. Proposition

- 1.) Sei  $I := I_1 \cup I_2$ , wobei  $I_1 = [a, b]$  und  $I_2 = [b, c]$  mit  $a < b < c$ . Weiters seien  $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  stückweise reguläre Wege mit  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ . Wir definieren den stückweise regulären Summenweg  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t) & b \leq t \leq c. \end{cases}$$

Dann gilt  $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ . (Additivität der Weglänge)

- 2.) Invarianz der Bogenlänge unter zulässiger Parametertransformation: Sind die stückweise regulären Wege  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  äquivalent ( $\gamma \sim \sigma$ ), dann gilt  $L(\gamma) = L(\sigma)$ .

Daher ist die Weglänge von (orientierten) stückweise regulären Kurven wohldefiniert.

**Beweis:** 1.) folgt aus  $\int_a^c \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt + \int_b^c \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt$ .

2.) Sei  $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$  eine zulässige Parametertransformation und  $\sigma \circ \varphi = \gamma$ . Wegen  $\dot{\gamma} = (\dot{\sigma} \circ \varphi) \cdot \varphi'$  folgt durch Substitution ( $\tau = \varphi(t)$ )

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\sigma}(\varphi(t))\| \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{>0} dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \|\dot{\sigma}(\tau)\| d\tau = L(\sigma).$$

□

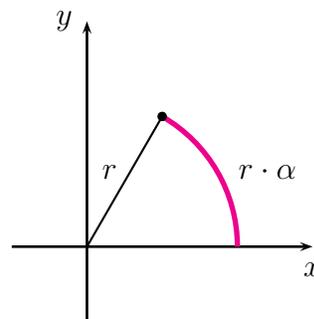
## 21.8. Beispiele

- 1.) Für  $\alpha > 0$  und  $r > 0$  sei  $\gamma: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^2$  der Kreisbogen  $\gamma(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)$ . Wegen  $\dot{\gamma}(t) = (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t)$  ist  $\|\dot{\gamma}(t)\| = r$  und daher

$$L(\gamma) = \int_0^\alpha \|\dot{\gamma}(t)\| dt = r \int_0^\alpha dt = r \cdot \alpha.$$

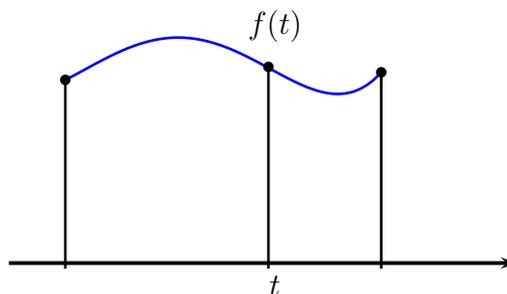
Insbesondere ergibt sich für den Einheitskreisumfang  $2\pi$  (setze  $r = 1$  und  $\alpha = 2\pi$ ).

Der Parameter  $t \in [0, \alpha]$  beschreibt hier also den Winkel genau im so genannten Bogenmaß.



- 2.) Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so dass  $\gamma(t) := (t, f(t))$  den Graphen von  $f$  beschreibt. Dann gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|(1, f'(t))\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$



## 21.9. Parametrisierung nach der Bogenlänge

Wir geben nun für orientierte reguläre Kurven eine ausgezeichnete Parametrisierung  $\tilde{\gamma}$  an, in der stets  $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$  gilt, also der Tangentialvektor normiert ist.

Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein regulärer Weg. Wir suchen ein kompaktes Intervall  $J \subseteq \mathbb{R}$  und eine stetig differenzierbare, bijektive Funktion  $\varphi: J \rightarrow [a, b]$  mit  $\varphi'(s) > 0$  für alle  $s \in J$ , sodass für  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$  gilt  $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$  für alle  $s \in J$ .

Wegen  $\dot{\tilde{\gamma}} = (\dot{\gamma} \circ \varphi) \cdot \varphi'$  muss daher  $1 = \|\dot{\gamma}(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s)$  gelten. Daraus folgt mit  $t := \varphi(s)$  nun

$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(s)} = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

und schließlich nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(a) + \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau \quad (a \leq t \leq b).$$

Wir dürfen uns  $\varphi^{-1}(a) = 0$  wünschen und erhalten somit  $\varphi^{-1}(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| dt$ . Das heißt die gesuchte Parametrisierung  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  verwendet dann den neuen Parameter

$$s = \varphi^{-1}(t) = L\left(\gamma|_{[a,t]}\right) \in [0, L(\gamma)],$$

den so genannten *Bogenlängenparameter*. Der Weg  $\tilde{\gamma}: [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Parametrisierung von  $\gamma$  nach der Bogenlänge*.

Die Berechnung des Bogenlängenparameters gemäß  $s = L\left(\gamma|_{[a,t]}\right)$  ist natürlich auch für stetig differenzierbare (nicht notwendig reguläre) Wege möglich. Es wird i.A. aber dadurch keine zulässige Parametrisierung erzeugt. (Warum?)

**Bemerkung:** Ist  $C$  eine reguläre Kurve und  $\gamma$  ein regulärer Weg, der  $C$  repräsentiert, so gilt für seine Parametrisierung  $\tilde{\gamma}$  nach der Bogenlänge

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\|^2 = \langle \dot{\tilde{\gamma}}(s) | \dot{\tilde{\gamma}}(s) \rangle = 1 \quad \forall s \in [0, L(\gamma)].$$

Durch Differenzieren nach  $s$  erhalten wir daraus  $2\langle D\dot{\tilde{\gamma}}(s) | \dot{\tilde{\gamma}}(s) \rangle = 0$ , d.h. es gilt mit  $\ddot{\tilde{\gamma}}(s) := D\dot{\tilde{\gamma}}(s)$  als *Beschleunigungsvektor* stets

$$\ddot{\tilde{\gamma}}(s) \perp \dot{\tilde{\gamma}}(s).$$

[Warnung: diese Relation gilt i.A. nur für die Parametrisierung nach der Bogenlänge!]

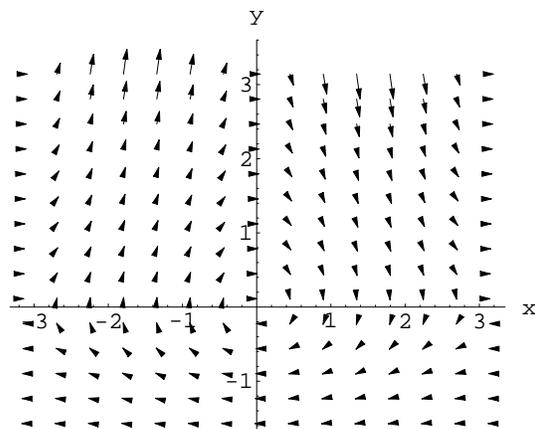
Die Größe  $\kappa(s) := \|\ddot{\tilde{\gamma}}(s)\|$  heißt *Krümmung* der Kurve  $C$  im Punkt  $\tilde{\gamma}(s)$ .

## §22. Vektorfelder, 1-Formen und Kurvenintegrale

### 22.1. Definition

Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Eine Abbildung  $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Vektorfeld* auf  $U$ .

Wir stellen uns dabei die Abbildung  $v$  oft so vor, dass an jedem Punkt  $p \in U$  der (Tangential-) Vektor  $v(p)$  angeheftet wird. In der Physik entspricht das einem (zeitunabhängigen) *Kraftfeld*.



### 22.2. Beispiel

1.) Obige Graphik zeigt das Vektorfeld  $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $v(x, y) = (y, -e^y \sin x)$  auf (einem Ausschnitt von)  $\mathbb{R}^2$ . Der Plot wurde erstellt in MATHEMATICA mit der Eingabe

```
<< Graphics'PlotField'
```

```
PlotVectorField[{y, - Exp[y]Sin[x]}, {x, -Pi, Pi}, {y, -Pi/2, Pi},  
Axes -> True, AxesLabel -> {x, y}]
```

2.) Sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq_{\text{offen}} U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion, dann definiert  $v(p) := \text{grad } f(p)$  (für  $p \in U$ ) ein stetiges Vektorfeld  $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir sagen,  $v$  sei ein *Gradientenfeld*. In der Physik nennt man in diesem Fall  $-f$  ein *Potenzial* für  $v$ .

### 22.3. Vektorfelder und 1-Formen

Sei  $v$  ein Vektorfeld auf der offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und bezeichne  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  das Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ .

Für jedes  $p \in U$  definieren wir ein lineares Funktional auf  $\mathbb{R}^n$  durch  $\omega(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega(p)(h) := \langle v(p) | h \rangle$  für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ ; also ist  $\omega(p)$  ein Element im Dualraum  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

Vermöge der Zuordnung  $p \mapsto \omega(p)$  erhalten wir eine Abbildung  $U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ . In der betrachteten Situation haben wir diese Abbildung aus einem gegebenen Vektorfeld erzeugt. Den allgemeinen Fall fassen wir in die folgende

**Definition:** Eine 1-Form oder Pfaffsche Form auf  $U$  ist eine Abbildung  $\omega: U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ .

**Beispiele:**

- 1.) Ist  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so ist  $Df: U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$  und definiert also eine 1-Form, die wir mit  $df$  bezeichnen und (*äußeres Differential*) von  $f$  nennen. [Die Notation  $df(p)$  soll den Standpunkt des linearen Funktionals betonen, während wir ja bisher  $Df(p)$  zur Vereinfachung meist mit dem Zeilenvektor der partiellen Ableitungen ( $(1 \times n)$ -Jacobi-Matrix) identifiziert haben.]

Es gilt für alle  $p \in U$  und für alle  $h \in \mathbb{R}^n$ :

$$df(p)(h) = \langle \text{grad } f(p) \mid h \rangle = Df(p) \cdot h.$$

- 2.) Als Spezialfall von 1.) für  $f = pr_j|_U: U \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $j$ -te Koordinatenprojektion mit  $pr_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$  erhalten wir als Differential  $dpr_j$  eine 1-Form, die wir mit  $dx_j$  bezeichnen.

Ist  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$ , so gilt  $\forall p \in U$ :

$$dx_j(p)(e_k) = \langle e_j \mid e_k \rangle = \delta_{jk},$$

d.h.  $\{dx_1(p), \dots, dx_n(p)\}$  ist die zu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  duale Basis in  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Insbesondere lautet die Darstellung von  $df(p)$  aus 1.) in dieser Basis

$$(22.1) \quad df(p) = \sum_{j=1}^n D_j f(p) \cdot dx_j(p).$$

Wir können ähnlich wie in (22.1) sogar für jede 1-Form  $\omega$  eine punktweise Basisentwicklung angeben, in der  $\omega$  durch passende Koeffizientenfunktionen  $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$  vertreten wird. Zugleich erlaubt dies eine Identifizierung von Vektorfeldern mit 1-Formen (auf der festen offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ).

**Proposition**

Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

- 1.) Zu jeder 1-Form  $\omega: U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  gibt es genau eine Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft

$$(22.2) \quad \omega(p) = \sum_{j=1}^n f_j(p) \cdot dx_j(p) \quad \forall p \in U.$$

Es gilt  $f_j(p) = \omega(p)(e_j)$  für jedes  $p \in U$  und  $j = 1, \dots, n$ .

- 2.) Die Zuordnung  $v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto \hat{v} = \sum_{j=1}^n v_j \cdot dx_j$  liefert einen Isomorphismus (d. h. eine lineare und bijektive Abbildung) des  $\mathbb{R}$ -Vektorraumes von Vektorfeldern mit jenem der 1-Formen auf  $U$ .

**Beweis:** *ad 1.):* Für jedes  $p \in U$  ist  $\{dx_1(p), \dots, dx_n(p)\}$  eine Basis von  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Daher gilt  $\forall p \in U$ : es gibt eindeutige reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit

$$\omega(p) = \sum_{j=1}^n \lambda_j dx_j(p).$$

Es ist  $\lambda_j = \lambda_j dx_j(p)(e_j) = \omega(p)(e_j)$ . Wir setzen  $f_j(p) := \lambda_j$ .

Somit haben wir Funktionen  $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, für die gilt

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j.$$

Die Eindeutigkeit von  $f_1, \dots, f_n$  ist klar wegen der Eindeutigkeit der skalaren Faktoren in der Basisdarstellung für jedes  $p \in U$ .

*ad 2.):* Die Menge aller Vektorfelder auf  $U$  sowie die Menge der 1-Formen auf  $U$  bilden Vektorräume über  $\mathbb{R}$ , wenn die Operation der Vektoraddition und skalaren Multiplikation punktweise ausgeführt werden. [Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $v, w$  Vektorfelder bzw. 1-Formen  $\omega, \nu$  ist  $p \mapsto \lambda \cdot v(p) + \mu \cdot w(p)$  wieder ein Vektorfeld bzw.  $p \mapsto \lambda \cdot \omega(p) + \mu \cdot \nu(p)$  eine 1-Form und es gelten alle Vektorraumaxiome.]

Die Linearität der Abbildung  $v \mapsto \hat{v}$  ist klar.

Injektivität: falls  $\hat{v} = 0$  ist, so folgt daraus  $\forall p \in U$ , dass  $\hat{v}(p) = \sum_{j=1}^n v_j(p) dx_j(p) = 0$ ; daher muss nach 1.) dann  $v_j(p) = 0$  gelten ( $j = 1, \dots, n$ ); da  $p$  beliebig war, erzwingt dies  $v = 0$ .

Surjektivität: sei  $\omega$  eine 1-Form auf  $U$  mit der Darstellung  $\omega(p) = \sum_{j=1}^n f_j(p) dx_j(p)$  für alle  $p \in U$  gemäß 1.); wir setzen  $v := (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dann gilt nach Konstruktion  $\hat{v} = \omega$ .  $\square$

**Definition:** Eine 1-Form  $\omega$  auf der offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *stetig* (bzw. *differenzierbar*, *stetig differenzierbar* etc.), wenn alle Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$  in der Darstellung (22.2) es sind.

**Bemerkung:** Die Identifizierung von Vektorfeldern mit 1-Formen in Punkt 2.) der obigen Proposition baut — bei genauer Betrachtung — auf dem gegebenen Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  im  $\mathbb{R}^n$  auf (bzw. hängt von der dadurch vermittelten dualen Basis ab). Ein anderes Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ergäbe in derselben Weise ebenfalls einen Isomorphismus, der aber als lineare Abbildung i.A. verschieden sein wird.

## 22.4. Wegintegrale

**Definition:** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  eine stetige 1-Form auf  $U$  und  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ist

$$(22.3) \quad \int_{\gamma} \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) dt$$

das *Wegintegral* von  $\omega$  über  $\gamma$ .

Wenn  $\omega$  die Darstellung  $\omega = \sum_{j=1}^n f_j \cdot dx_j$  mit stetigen Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_n$  hat,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  gesetzt wird, und  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  ist, so haben wir für den Integranden in (22.3) den folgenden konkreten Ausdruck

$$\omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) = \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t) = \langle f(\gamma(t)) \mid \dot{\gamma}(t) \rangle,$$

woraus auch die Stetigkeit bezüglich  $t$  klar ist. Zusammenfassend erhalten wir für die Berechnung des Wegintegrals

$$(22.3') \quad \int_{\gamma} \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t) dt = \int_a^b \langle f(\gamma(t)) \mid \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

**Bemerkung:** Falls der Weg  $\gamma$  nur stückweise  $\mathcal{C}^1$  ist, d. h.  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ist stetig und es gibt eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ , so dass  $\sigma_j := \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$  jeweils  $\mathcal{C}^1$  ist ( $j = 1, \dots, N$ ), dann setzen wir für das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \omega := \sum_{j=1}^N \int_{\sigma_j} \omega.$$

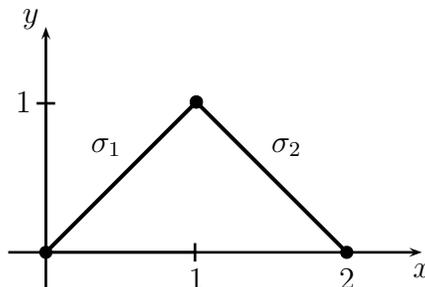
**Beispiele:** 1.) Sei  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  für  $t \in [0, 2\pi]$  und  $\omega(x, y) = -y dx + x dy$  auf  $\mathbb{R}^2$ , dann ist

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-\sin t (-\sin t) + \cos t \cos t)}_{=1} dt = 2\pi.$$

2.) Betrachte  $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\gamma(t) := \begin{cases} \sigma_1(t) = (t, t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma_2(t) = (t, 2-t) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

und  $\omega(x, y) = x^2 dx + (x - y) dy$  auf  $\mathbb{R}^2$ .



Wir berechnen mit  $\dot{\sigma}_1(t) = (1, 1)$  und  $\dot{\sigma}_2(t) = (1, -1)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\sigma_1} \omega + \int_{\sigma_2} \omega = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + (t-t) \cdot 1) dt + \int_1^2 (t^2 \cdot 1 + (t-(2-t)) \cdot (-1)) dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (t^2 + 2t - 2) dt = \frac{1}{3} + \left( \frac{t^3}{3} + t^2 - 2t \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left( \frac{8}{3} + 4 - 4 \right) - \left( \frac{1}{3} + 1 - 2 \right) = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

## 22.5. Lemma (Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung)

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  eine stetige 1-Form,  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Weg und  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  eine zulässige Parametertransformation [d.h.  $\varphi \in \mathcal{C}^1$  und  $\varphi' > 0$ ]. Dann gilt

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega.$$

**Bemerkung:** Für  $\varphi' < 0$ , d.h.  $\varphi$  orientierungsumkehrend, so gilt  $\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = - \int_{\gamma} \omega$ .

**Beweis:** Für den Weg  $\sigma := \gamma \circ \varphi$  gilt  $\int_{\sigma} \omega = \int_c^d \omega(\sigma(s))(\dot{\sigma}(s)) ds \stackrel{[\dot{\sigma} = \varphi' \cdot \dot{\gamma}]}{=} \int_c^d \omega(\gamma(\varphi(s))) (\dot{\gamma}(\varphi(s))) \varphi'(s) ds$

$$\int_c^d \omega(\gamma(\varphi(s))) (\dot{\gamma}(\varphi(s))) \varphi'(s) ds \stackrel{[\text{Subst. } t = \varphi(s)]}{=} \int_a^b \omega(\gamma(t)) (\dot{\gamma}(t)) dt = \int_{\gamma} \omega. \quad \square$$

## 22.6. Korollar und Definition

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  eine stetige 1-Form und  $C$  eine orientierte reguläre Kurve in  $U$ .

Dann ist das *Kurvenintegral*  $\int_C \omega$  wohldefiniert wie folgt:

Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein beliebiger Repräsentant von  $C$ , dann ist

$$\int_C \omega := \int_\gamma \omega.$$

(Analog für stückweise reguläre Kurven.)

## 22.7. Bemerkung (Kurvenintegrale von Vektorfeldern)

Sei  $v = (v_1, \dots, v_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld auf  $U$ , dann ist  $\hat{v} = \sum_{j=1}^n v_j dx_j$  die entsprechende 1-Form auf  $U$ . Symbolisch können wir mit  $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$  die Identifizierung so schreiben:  $\hat{v} = \langle v | dx \rangle$ . Somit erhalten wir die Identität

$$\int_C \hat{v} = \int_C \langle v | dx \rangle = \int_a^b \langle v(\gamma(t)) | \dot{\gamma}(t) \rangle dt,$$

deren rechte Seite auch als Definition für das *Kurvenintegral des Vektorfeldes  $v$  entlang  $C$*   $\int_C \langle v | dx \rangle$  dienen kann.

In der Physik z.B. sind auch die Notationen  $d\vec{s} = dx$  und  $v \cdot w$  für  $\langle v | w \rangle$  üblich. Dann kann der Ausdruck  $\int_C v \cdot d\vec{s}$  als Kurvenintegral von  $v$  über  $C$  im obigen Sinne interpretiert werden.

Eine physikalische Interpretation des Kurvenintegrals fasst dieses als geleistete Arbeit (oder gewonnene Energie — je nach Vorzeichen) im Kraftfeld  $v$  bei der Bewegung entlang der Kurve  $C$  auf.

## 22.8. Stammfunktionen

**Definition:** Sei  $\omega$  eine stetige 1-Form auf der offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Eine *Stammfunktion* von  $\omega$  ist eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $dF = \omega$ . Eine 1-Form heißt *exakt*, wenn sie eine Stammfunktion besitzt.

**Bemerkung:** 1.) Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $\omega$ , dann ist für alle  $c \in \mathbb{R}$  auch  $F + c$  eine Stammfunktion von  $\omega$ .

2.) Im Fall  $n = 1$  können wir stetige 1-Formen stets als  $\omega = f dx$  schreiben, wobei  $f$  eine stetige Funktion ist. Die Frage nach einer Stammfunktion  $F$  für  $\omega$  führt auf die Gleichung

$$f dx = \omega \stackrel{?}{=} dF = F' dx,$$

daher gilt folgende Äquivalenz:

$F$  Stammfunktion von  $\omega \iff F$  ist Stammfunktion von  $f$  im Sinne von Analysis 1.

Daraus lesen wir ab: Jede 1-Form auf einem offenem Intervall  $U \subseteq \mathbb{R}$  ist exakt.

(Für  $x_0 \in U$  fix erhalten wir nämlich stets eine Stammfunktion durch  $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$ .)

[Die Aussage gilt sogar für beliebige offene Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}$ ; vgl. [AE99, VIII.3.4(c)].]

3.) Sei  $v: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld, dann gilt:  $\hat{v} = \sum_{j=1}^n v_j \cdot dx_j$  ist exakt

$$\iff \exists F: U \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^1 \text{ mit } \sum_{j=1}^n D_j F dx_j = dF = \hat{v} = \sum_{j=1}^n v_j dx_j$$

$$\iff \exists F: U \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^1 \text{ mit } v = \text{grad } F.$$

D.h.:  $v$  ist ein Gradientenfeld  $\iff \hat{v}$  ist exakt

In der Physik sagt man in dem Fall auch, dass  $v$  das Potenzial  $\Phi = -F$  besitzt.

Folgende Fragen werden wir im Rest dieses Abschnittes behandeln:

- 1) Welchen Nutzen haben Stammfunktionen?
- 2) Welche 1-Formen  $\omega: U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  besitzen Stammfunktionen?
- 3) Wie findet man Stammfunktionen zu gegebenen 1-Formen?

**Proposition:** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  eine exakte stetige 1-Form auf  $U$  und  $F$  eine Stammfunktion von  $\omega$  (auf  $U$ ).

Für jeden stückweisen  $\mathcal{C}^1$ -Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  mit Anfangs- und Endpunkten  $p := \gamma(a)$ ,  $q := \gamma(b) \in U$  gilt:

$$(22.4) \quad \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} dF = F(q) - F(p).$$

Insbesondere gilt: wenn  $\gamma$  (zusätzlich) *geschlossen* ist, d.h.  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , dann folgt

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

**Beweis:** Zunächst sei  $\gamma$  stetig differenzierbar. Dann ist nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) = \langle \text{grad } F(\gamma(t)) \mid \dot{\gamma}(t) \rangle = dF(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t))$$

und daher

$$\int_{\gamma} dF = \int_a^b dF(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) dt = F(\gamma(t)) \Big|_a^b = F(q) - F(p).$$

Falls  $\gamma$  nur stückweise  $\mathcal{C}^1$  ist, gilt mit einer entsprechenden Zerlegung  $a = t_0 < \dots < t_N = b$ ,  $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ :

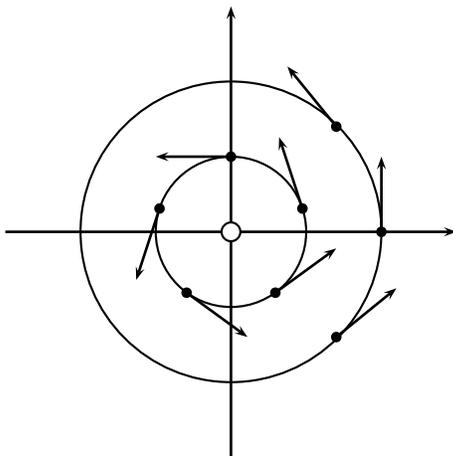
$$\int_{\gamma} dF = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k} dF = \sum_{k=1}^N (F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1}))) = F(\gamma(t_N)) - F(\gamma(t_0)).$$

□

**Beispiel:** Sei  $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  und

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Es ist also  $\omega = f_1 dx + f_2 dy$  mit  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ .



Das Vektorfeld  $f$  beschreibt Tangenten an Kreise um den Ursprung, die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Sei  $\gamma: [0, \alpha] \rightarrow U$  gegeben durch  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$  mit  $r > 0$  und  $\alpha > 0$ :

$\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$  und  $\omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) = \left\langle \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \right\rangle = 1$ , daher folgt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\alpha} 1 dt = \alpha.$$

Insbesondere ergibt sich für  $\alpha = 2\pi$  und  $r = 1$  ein geschlossener Kreis und

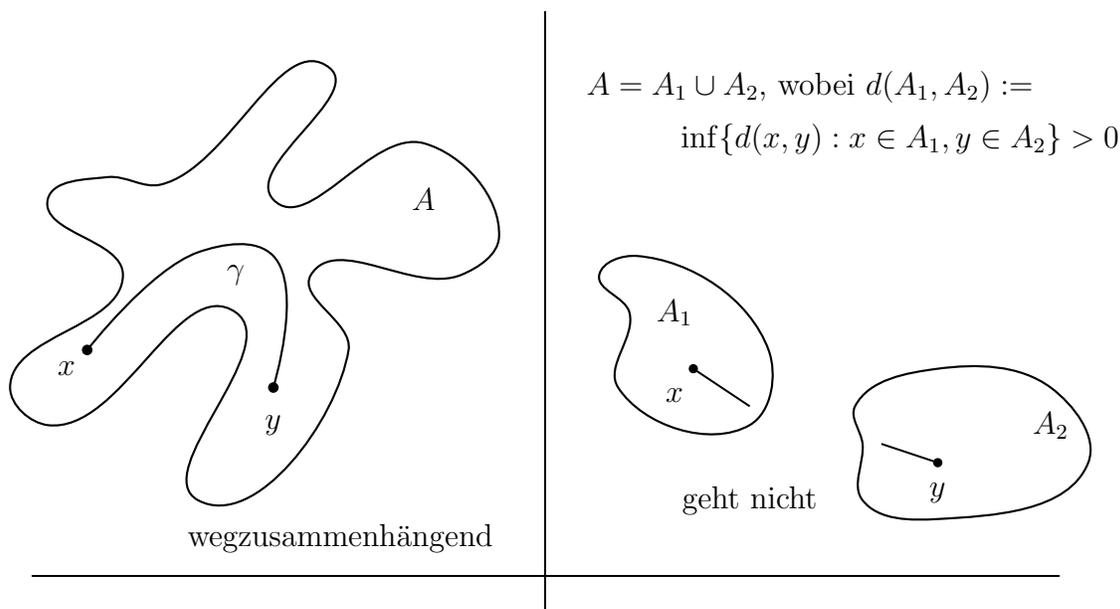
$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi \neq 0 :$$

aus obiger Proposition folgt also, dass  $\omega$  auf  $U$  keine Stammfunktion besitzen kann!

Aus den Beobachtungen in 22.8 können wir die Idee gewinnen, die Existenz von Stammfunktionen für eine 1-Form  $\omega$  auf  $U$  durch Integrale über geschlossene Kurven zu testen. Die entscheidende Frage ist dann aber, ob die Bedingung, dass geschlossene Kurvenintegrale allesamt verschwinden müssen auch hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion ist?

## 22.9. Definition

- 1.) Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle Punkte  $x, y \in A$  einen stetigen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt, d. h.  $\gamma: [0, 1] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  stetig mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .



- 2.) Ein *Gebiet* im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmenge  $U$ , die offen und wegzusammenhängend ist.

[Bemerkung zu einem allgemeineren Begriff: Eine Teilmenge  $A$  eines metrischen Raumes heißt *zusammenhängend*, falls es keine zwei offenen, nichtleere und disjunkte Mengen  $O_1$  und  $O_2$  in  $X$  geben kann mit  $A = (O_1 \cap A) \cup (O_2 \cap A)$ .

Im Allgemeinen gilt 'wegzusammenhängend  $\Rightarrow$  zusammenhängend', aber nicht umgekehrt (vgl. [vQ01, Kapitel 4]).

Ist nun  $U$  eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes, so gilt allerdings:  
 $U$  zusammenhängend  $\iff U$  wegzusammenhängend.

Für einen Beweis siehe z.B. [AE02, Kap. III, Korollar 4.11]; d.h. insbesondere hätten wir bei der Definition von Gebiet auch „nur“ zusammenhängend verlangen müssen.]

Die grundlegende Idee der Konstruktion eines Kandidaten für eine Stammfunktion  $F$  einer gegebenen stetigen 1-Form auf  $U$  ist nun folgende: wir halten einen Punkt  $p \in U$  fest und definieren Funktionswerte  $F(q)$  für  $q \in U$ , indem wir jeweils einen Weg  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$  wählen und angeleitet durch Gleichung (22.4) ansetzen:  $F(q) := F(p) + \int_{\gamma} \omega$ , wobei der fixe Wert  $F(p)$  beliebig sein kann.

Ist  $U$  ein Gebiet, so wird uns die Existenz eines stetigen Weges  $\gamma$  von  $p$  nach  $q$  garantiert — für die Kurvenintegrale benötigen wir jedoch stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurven. Diesen technischen Zusatz verschaffen wir uns im folgenden

## 22.10. Lemma

- 1.) Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $K \subseteq X$  kompakt und  $A \subseteq X$  abgeschlossen mit  $A \cap K = \emptyset$ . Dann gilt:  $\exists c > 0$  derart, dass

$$\forall x \in K \forall y \in A: \quad d(x, y) \geq c.$$

- 2.) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\sigma: [0, 1] \rightarrow U$  stetig; wir setzen  $p := \sigma(0)$  und  $q := \sigma(1)$ . Dann gibt es auch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg  $\gamma$  in  $U$ , der  $p$  und  $q$  verbindet, d. h.  $\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$  stückweise  $\mathcal{C}^1$  mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(1) = q$ .

**Beweis:** 1.) wurde als Übungsaufgabe zu §17 bewiesen.

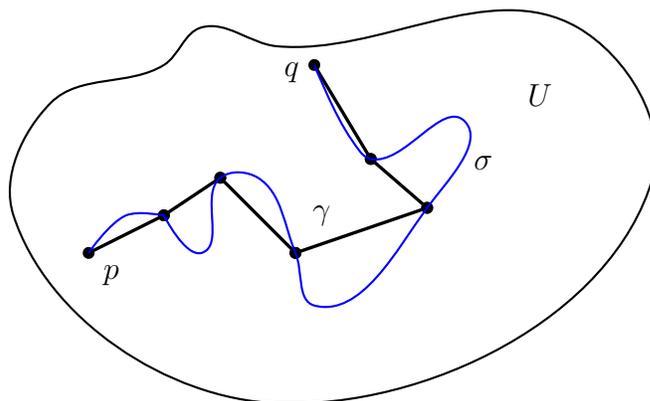
- 2.) Es ist  $K := \sigma([0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $A := \mathbb{R}^n \setminus U$  abgeschlossen mit  $A \cap K = \emptyset$ . Nach 1.) gibt es also ein  $c > 0$ , sodass

$$(*) \quad \forall t \in [0, 1] \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus U: \quad \|\sigma(t) - y\| \geq c.$$

Als stetige Abbildung auf einer kompakten Menge ist  $\sigma$  gleichmäßig stetig, daher gibt es eine Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  mit

$$\|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| < c \quad (j = 1, \dots, m).$$

Wir definieren nun  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  als Polygonzug mit den Ecken  $\sigma(t_0), \dots, \sigma(t_m)$ ,



d.h.  $\gamma(\lambda t_j + (1 - \lambda)t_{j-1}) := \lambda\sigma(t_j) + (1 - \lambda)\sigma(t_{j-1})$  für  $0 \leq \lambda \leq 1, j = 1, \dots, m$ .

Dann ist  $\gamma$  stückweise gerade mit stetigen Übergängen an den Zerlegungspunkten, daher also stückweise  $\mathcal{C}^1$ . Weiters gilt  $\gamma(0) = \sigma(t_0) = p$  und  $\gamma(1) = \sigma(t_m) = q$ .

Schließlich gilt auch  $\gamma([0, 1]) \subseteq U$ , denn zu jedem  $t \in [0, 1]$  gibt es  $\lambda \in [0, 1]$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$  mit  $t = \lambda t_j + (1 - \lambda)t_{j-1}$  und somit

$$\|\gamma(t) - \sigma(t_{j-1})\| = \lambda \|\sigma(t_j) - \sigma(t_{j-1})\| < 1 \cdot c = c;$$

wegen  $\sigma(t_{j-1}) \in \sigma([0, 1]) = K$  und (\*) muss daher  $\gamma(t) \in U$  gelten. □

## 22.11. Theorem

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\omega$  eine stetige 1-Form auf  $U$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $\omega$  besitzt eine Stammfunktion in  $U$  (d.h.  $\omega$  ist exakt in  $U$ ).
- 2.) Für jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg  $\gamma$  in  $U$  gilt

$$(22.5) \quad \int_{\gamma} \omega = 0$$

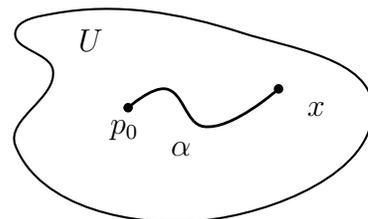
### Beweis:

(1.)  $\Rightarrow$  (2.): folgt aus Proposition 22.8.

(2.)  $\Rightarrow$  (1.): Wir folgen der oben beschriebenen Idee für die Konstruktion einer Stammfunktion  $F$ :

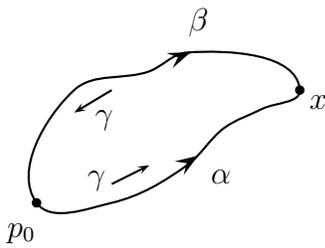
sei  $p_0 \in U$  beliebig und fix; da  $U$  wegzusammenhängend ist, gibt es zu  $x \in U$  einen stetigen Weg  $\gamma$  in  $U$  von  $p_0$  nach  $x$ . Nach Lemma 22.10 gibt es auch einen stückweisen  $\mathcal{C}^1$ -Weg  $\alpha: [0, 1] \rightarrow$

$U$  mit  $\alpha(0) = p_0$  und  $\alpha(1) = x$ ; wir setzen  $F(x) := \int_{\alpha} \omega$ .



⊙  $F$  ist wohldefiniert  $U \rightarrow \mathbb{R}$ :

Sei nämlich  $\beta: [0, 1] \rightarrow U$  auch stückweise  $\mathcal{C}^1$  mit  $\beta(0) = p_0$  und  $\beta(1) = x$ , dann bilden wir die Zusammensetzung von  $\alpha$  mit  $\beta$  durch den Weg  $\gamma: [0, 2] \rightarrow U$  mit

$$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ \beta(2-t) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$


Dann ist  $\gamma$  stückweise  $\mathcal{C}^1$  und geschlossen ( $\gamma(0) = p_0 = \gamma(2)$ ), daher folgt laut Annahme

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha} \omega - \int_{\beta} \omega,$$

wobei wir die Additivität des Kurvenintegrals und 22.5 mit Orientierungsumkehr verwendet haben. Somit gilt  $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$  und  $F(x)$  ist wohldefiniert; daher ist auch die vereinfachte Schreibweise

$$F(x) = \int_{p_0}^x \omega$$

sinnvoll (weil unabhängig vom Weg).

⊙  $F$  ist stetig differenzierbar und es gilt  $dF = \omega$ :

Es sei  $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ . Wir zeigen, dass  $f_j = D_j F$  ( $1 \leq j \leq n$ ) gilt, dann sind wir fertig, weil daraus die Stetigkeit aller partiellen Ableitungen von  $F$  folgt und weiters auch  $dF = \sum D_j dx = \sum f_j dx = \omega$ .

Sei wie üblich  $\{e_1, \dots, e_n\}$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  und  $h \in \mathbb{R}$  mit  $h \neq 0$  so klein, dass die Strecke  $\beta(t) := x + t h e_j$  für  $0 \leq t \leq 1$  ganz in  $U$  zu liegen kommt. Dann ist

$$F(x + h e_j) - F(x) = \int_{p_0}^{x+h e_j} \omega - \int_{p_0}^x \omega = \int_{\beta} \omega = \int_0^1 \underbrace{\omega(x + t h e_j)(h e_j)}_{f_j(x + t h e_j) \cdot h} dt$$

und daher

$$D_j F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h e_j) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \underbrace{f_j(x + t h e_j)}_{\rightarrow f_j(x) \text{ [glm.]}} dt = \int_0^1 f_j(x) dt = f_j(x).$$

□

## 22.12. Integrierbarkeitsbedingungen

Die Bedingung (22.5) ist zwar äquivalent zur Existenz einer Stammfunktion, lässt sich aber keineswegs direkt aus den Koeffizientenfunktionen  $f_1, \dots, f_n$  einer stetigen 1-Form  $\omega$  ablesen. Deshalb untersuchen wir möglichst einfache Folgerungen der Gleichung  $\omega = dF$ .

Zunächst bedeutet die obige Gleichung wegen  $dF = \sum D_j F dx_j$  natürlich, dass  $f_j = D_j F$  ( $j = 1 \dots, n$ ) gilt. ( $F$  ist aber später eben gesucht — bzw. die Existenz von  $F$  in Frage; daher versuchen wir, jegliche Referenz auf Werte von  $F$  loszuwerden.)

Angenommen  $F$  sei eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion (somit  $\omega$  also  $\mathcal{C}^1$ ), dann folgt durch weitere partielle Differentiation mit Hilfe des Satzes von Schwarz ??

$$D_i f_j = D_i D_j F = D_j D_i F = D_j f_i \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Durch die Gleichheit der äußersten Terme haben wir also notwendige Bedingung für die Existenz einer zweimal stetig differenzierbaren Stammfunktion vorliegen.

**Definition:** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Eine stetig differenzierbare 1-Form  $\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_j$  auf  $U$  heißt *geschlossen*, falls die *Integrabilitätsbedingungen*

$$(22.6) \quad D_j f_i = D_i f_j \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

gelten.

**Bemerkung:**

- 1.) In Dimension  $n = 3$  sei ein  $\mathcal{C}^1$  Vektorfeld  $v = (f_1, f_2, f_3)$  auf  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  gegeben: dann bedeutet die Bedingung (22.6) für die entsprechende 1-Form  $\hat{v}$  gerade, dass  $\text{rot}(v) = 0$  gilt.

Wir hatten bereits in (??) gesehen:  $v = \text{grad } F \Rightarrow \text{rot } v = 0$ ; dies übersetzt sich nun mittels  $\omega = \hat{v}$  wie folgt:  $\omega$  exakt  $\Rightarrow \omega$  geschlossen.

- 2.) Die Bedingungen (22.6) sind notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion. Um dies zu zeigen, greifen wir zurück auf Beispiel 22.8 mit  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$  und  $\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$ : wir haben dort gezeigt, dass  $\omega$  keine Stammfunktion in  $U$  besitzen kann; dennoch gilt aber

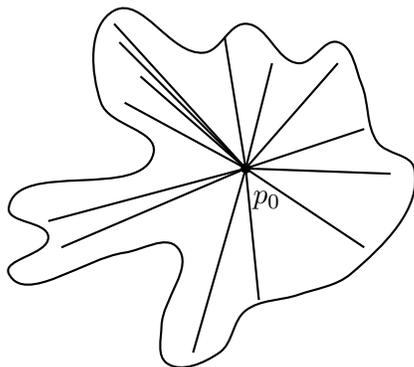
$$\begin{array}{rcl} D_2 f_1(x, y) & = & \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) + y2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \updownarrow \\ & & \ominus \\ D_1 f_2(x, y) & = & \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \updownarrow \end{array}$$

Es zeigt sich, dass der in 22.12, Bemerkung 2.), beobachtete „Defekt“ gewissermaßen in der ungünstigen Gestalt von  $U$  liegt: in Gebieten „ohne Löcher“ (so genannte *einfach zusammenhängende* Gebiete) ist für stetig differenzierbare 1-Formen die Bedingung (22.6) gleichwertig mit der Existenz von Stammfunktionen (vgl. [AE99, Kapitel VIII, Theorem 4.8]). Wir werden dies zumindest für eine vereinfachte Variante nachweisen.

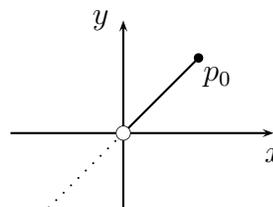
## 22.13. Sternförmige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

**Definition:** Eine Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *sternförmig* bezüglich des Punktes  $p_0 \in U$ , wenn folgendes gilt:  $\forall x \in U$  liegt die gesamte Verbindungsstrecke von  $p_0$  nach  $x$  in  $U$ , d. h.  $\{(1-t)p_0 + t \cdot x : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq U$ .

Mit anderen Worten: „von  $p_0$  aus kann ganz  $U$  beleuchtet werden“.



**Beispiel:**  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$  ist nicht sternförmig, denn für jedes  $p_0 \in U$  ist stets ein Halbstrahl hinter  $(0,0)$  verdeckt.



## 22.14. Theorem

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ein sternförmiges Gebiet und  $\omega$  eine stetig differenzierbare 1-Form. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $\omega$  ist exakt (d.h.  $\omega$  besitzt eine Stammfunktion).
  
- 2.)  $\omega$  ist geschlossen (d.h.  $\omega$  erfüllt die Integrationsbedingung (22.6)).

**Beweis:** 1.)  $\Rightarrow$  2.): folgt aus den Überlegungen am Anfang von 22.12.

2.)  $\Rightarrow$  1.): OBdA ist  $U$  sternförmig bzgl.  $p_0 = 0$  (andernfalls ist dies durch Translation stetig zu erreichen).

Sei  $\omega = \sum_{l=1}^n f_l dx_l$ ; für  $x \in U$  definieren wir den Wert der (prospektiven) Stammfunktion

durch Integration über die Strecke von 0 nach  $x$ , d.h. mit  $\gamma(t) = tx$  für  $0 \leq t \leq 1$  ist

$$F(x) := \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \omega(tx)(x) dt = \int_0^1 \underbrace{\left( \sum_{l=1}^n f_l(tx) x_l \right)}_{g(t,x)} dt.$$

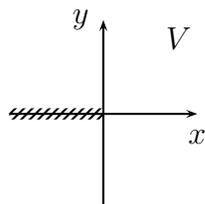
Nach Proposition ?? ist  $F$  als Parameterintegral stetig differenzierbar und es gilt für  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} D_j F(x) &= \int_0^1 D_{x_j} g(t, x) dt = \int_0^1 \left( \left( \sum_{l=1}^n \underbrace{D_j f_l}_{[(22.6)] = D_l f_j} (tx) \cdot tx_l \right) + f_j(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{\left( \sum_{l=1}^n D_l f_j(tx) tx_l \right)}_{\frac{d}{dt}(t f_j(tx)) - f_j(tx)} dt + \int_0^1 f_j(tx) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t \cdot f_j(tx)) dt \\ &= 1 \cdot f_j(1 \cdot x) - 0 \cdot f_j(0 \cdot x) = f_j(x), \end{aligned}$$

also ist  $dF = \omega$ . □

## 22.15. Beispiel

Wie wir oben gesehen haben, erfüllt die stetig differenzierbare 1-Form  $\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$  auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  die Integrabilitätsbedingungen und kann auf diesem Gebiet aber keine Stammfunktion haben. Aber auf dem Gebiet  $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$  besitzt  $\omega$  sehr wohl eine Stammfunktion:

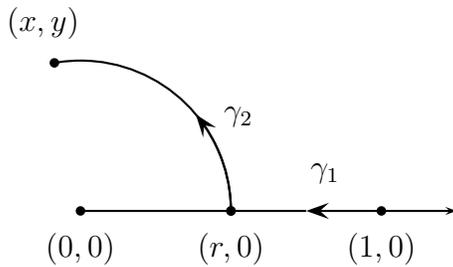


Das Gebiet  $V$  entsteht nämlich aus  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  durch Entfernung der negativen  $x$ -Achse und ist somit für jedes  $r > 0$  sternförmig bezüglich  $(r, 0)$ .

Daher gibt es nach dem obigen Theorem eine Stammfunktion  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  zu  $\omega$ .

Wie sieht so eine Stammfunktion konkret aus?

Dazu wählen wir den Punkt  $p_0 = (1, 0) \in V$  als Startpunkt für Kurven der Form  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$  nach  $(x, y) \in V$  in folgender Art:



mit  $r := (x^2 + y^2)^{1/2} > 0$  und  $-\pi < \varphi < \pi$  (eindeutig) so, dass  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , setzen wir

- falls  $r \leq 1$ :  $\gamma_1(t) = (r - t, 0)$  ( $r - 1 \leq t \leq 0$ )
- falls  $r > 1$ :  $\gamma_1(t) = (r + t, 0)$  ( $1 - r \leq t \leq 0$ ) sowie für  $(0 \leq t \leq |\varphi|)$
- falls  $\varphi \geq 0$ :  $\gamma_2(t) = (r \cos t, r \sin t)$
- falls  $\varphi < 0$ :  $\gamma_2(t) = (r \cos t, -r \sin t)$ .

Dann ergibt sich

$$\int_{\gamma} \omega = \underbrace{\int_{\gamma_1} \omega}_{[y=0, dy=0]} + \underbrace{\int_{\gamma_2} \omega}_{[\text{Bsp. 22.8}]} = 0 + \varphi = \varphi.$$

Wir betonen nochmals, dass für  $(x, y) \in V$  der Polarwinkel  $\varphi$  eindeutig im Bereich  $]-\pi, \pi[$  gewählt werden kann und schreiben für die dadurch vermittelte Abbildung  $\varphi = \arg(x, y)$ ,  $\arg: V \rightarrow \mathbb{R}$ . Somit haben wir also die Stammfunktion

$$F(x, y) = \arg(x, y)$$

zur 1-Form  $\omega$  auf dem Gebiet  $V$  erhalten.

## 22.16. Zur praktischen Bestimmung einer Stammfunktion

**Ein Beispiel im  $\mathbb{R}^3$ :**  $\omega(x, y, z) = (x + z)dx - (y + z)dy + (x - y)dz = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$

Wir überprüfen die Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} x+z \\ \swarrow \quad \searrow \\ \partial y \quad \partial z \\ 0 \qquad \qquad 1 \end{array} & \begin{array}{c} -y-z \\ \swarrow \quad \searrow \\ \partial x \quad \partial z \\ 0 \qquad \qquad -1 \end{array} & \begin{array}{c} x-y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \partial x \quad \partial y \\ 1 \qquad \qquad -1 \end{array} \end{array}$$

$\leadsto$  Integrabilitätsbedingung sind erfüllt; da  $\mathbb{R}^3$  sternförmig ist, gibt es eine Stammfunktion, d.h.  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \partial_x F &= x + z \\ \partial_y F &= -y - z \\ \partial_z F &= x - y. \end{aligned}$$

(0) Wir versuchen  $F^{[1]} := \int f_1 dx = \frac{x^2}{2} + zx$  [ $\Rightarrow \partial_x F = f_1$ ]

und überprüfen:  $\partial_y F^{[1]} = 0 \dots$  sollte aber  $= f_2 = -y - z$  sein!

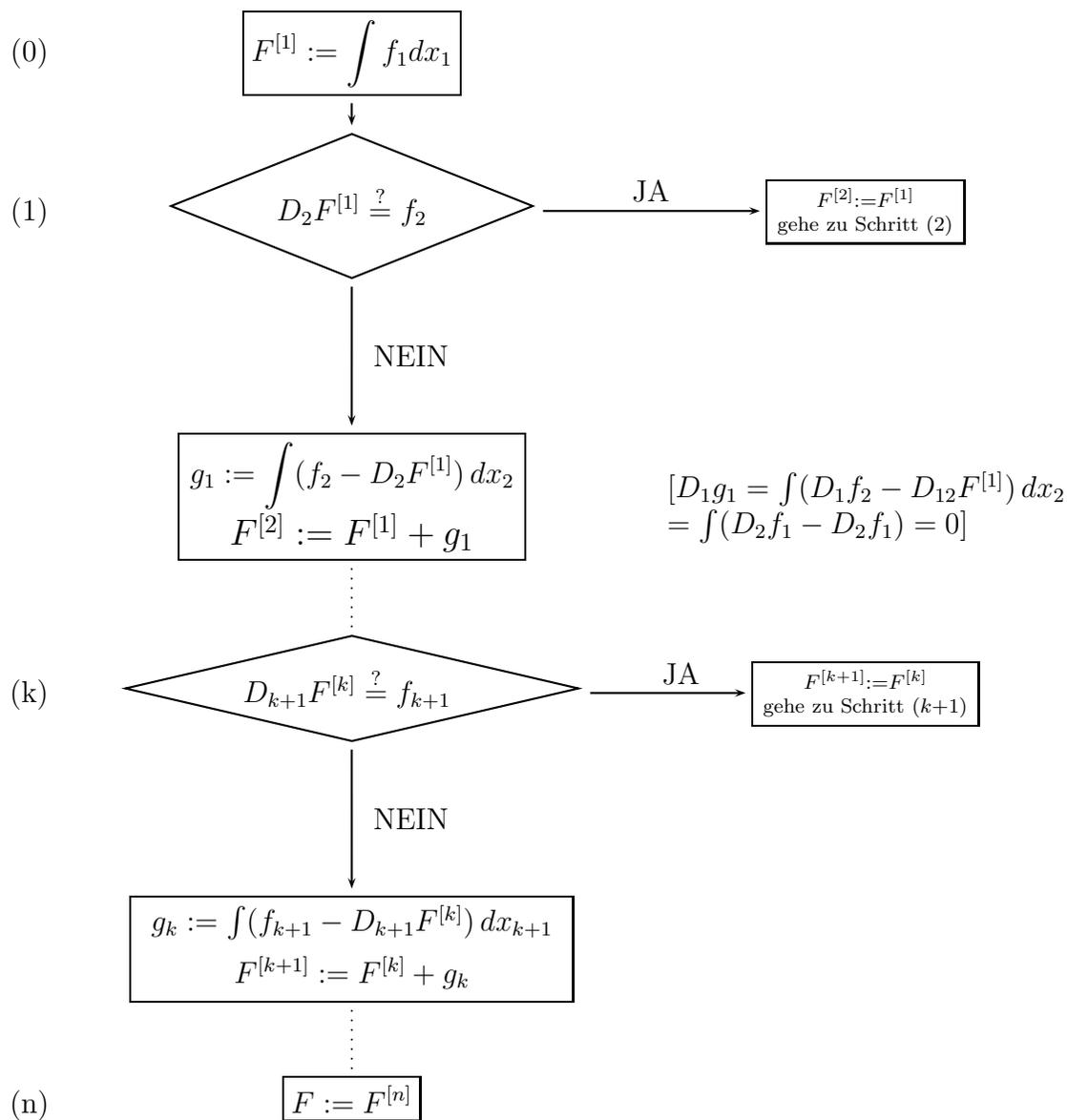
$$(1) \text{ Korrektur } F^{[2]} := F^{[1]} + \int (f_2 - \partial_y F^{[1]}) dy = \frac{x^2}{2} + zx + \int (-y - z) dy \\ = \frac{x^2}{2} + zx - \frac{y^2}{2} - zy$$

$$[\text{Bemerkung: } \partial_x \int (f_2 - \partial_y F^{[1]}) dy = \int (\underbrace{\partial_x f_2}_{\partial_y f_1} - \underbrace{\partial_{xy} F^{[1]}}_{\partial_y f_1}) dy = 0]$$

wir überprüfen:  $\partial_z F^{[2]} = x - y = f_3 \dots$  fertig,

d.h.  $F(x, y, z) := \frac{x^2 - y^2}{2} + z(x - y)$  ist eine Stammfunktion.

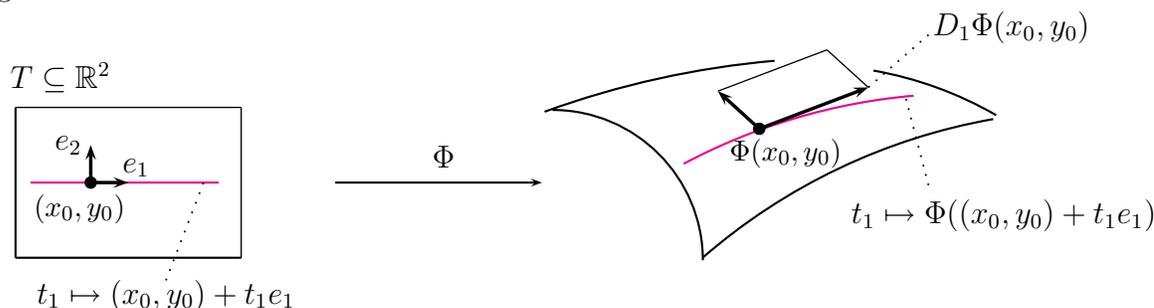
**Algorithmus:** sei das Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  so beschaffen, dass entlang der Koordinatenrichtungen integriert werden darf und  $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$



## §23. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

### 23.1. Parametrisierte Flächenstücke und Immersionen

**Grundidee:** wir stellen uns eine zweidimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^3$  als verbogenes Ebenenstück vor, wobei die Verbiegung durch eine stetig differenzierbare Abbildung bewerkstelligt wird:



Mit  $\Phi: \mathbb{R}^2 \underset{\text{offen}}{\supseteq} T \rightarrow \mathbb{R}^3$  differenzierbar und der Notation  $D_j\Phi = \begin{pmatrix} D_j\Phi_1 \\ D_j\Phi_2 \\ D_j\Phi_3 \end{pmatrix}$  liefert die (komponentenweise gebildete) Taylor-Approximation erster Ordnung eine Linearisierung nahe des Punktes  $\Phi(x_0, y_0)$  in der Form

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} (x_0, y_0) + t_1 \cdot e_1 \\ (x_0, y_0) + t_2 \cdot e_2 \end{Bmatrix}}_{\text{Basisrichtungen}} \mapsto \underbrace{\Phi(x_0, y_0) + \begin{Bmatrix} t_1 \cdot D_1\Phi(x_0, y_0) \\ t_2 \cdot D_2\Phi(x_0, y_0) \end{Bmatrix}}_{\text{Tangentialvektoren an die Fläche } \Phi(T)}$$

Da die Dimension der solcherart infinitesimal linearisierten Fläche gleich 2 sein soll, verlangen wir, dass die Tangentialvektoren linear unabhängig sein sollen, d.h.

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \text{Rang} (D_1\Phi(x_0, y_0) \ D_2\Phi(x_0, y_0)) = \text{Rang} D\Phi(x_0, y_0).$$

**Definition:** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen und  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t_1, \dots, t_k) \mapsto \Phi(t_1, \dots, t_k)$  stetig differenzierbar.  $\Phi$  heißt *Immersion*, falls gilt:

$$(23.1) \quad \forall t \in T: \quad \text{Rang } D\Phi(t) = k$$

[somit muss übrigens  $k \leq n$  gelten]; äquivalent dazu ist

$$(23.1') \quad \forall t \in T: \quad \{D_1\Phi(t), \dots, D_k\Phi(t)\} \text{ ist linear unabhängig in } \mathbb{R}^n.$$

In diesem Fall wird  $F := \Phi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$  als *parametrisierte k-Fläche* bezeichnet. Im Spezialfall  $k = 1$  erhalten wir reguläre Kurven als 1-Flächen.

**Bemerkung:** 1.) Falls  $k = n$  gilt, ist  $\Phi$  nach dem Umkehrsatz aus §20 ein lokaler  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus.

2.) Gleichung (23.1) impliziert die folgende wichtige technische Bedingung:  
für jedes  $t_* \in T$  können wir  $k$  von den  $n$  Komponentenfunktionen in  $\Phi$  auswählen, d.h.  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , sodass

$$(23.1'') \quad \det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) \neq 0$$

in einer offenen Umgebung von  $t_*$  gilt [das folgt aus der Rangbedingung zusammen mit der Stetigkeit von  $t \mapsto \det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t)$ ].

Allgemeiner gesagt gilt also für stetig differenzierbare Abbildungen  $f: \mathbb{R}^k \underset{\text{offen}}{\supseteq} W \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $t_* \in W$ :

$$(23.2) \quad \text{Rang } Df(t_*) = k \implies \exists \text{ Umgebung } U \ni t_*: \text{Rang } Df|_U(t) \geq k \quad \forall t \in U.$$

**Proposition:** Es sei  $\Phi: \mathbb{R}^k \underset{\text{offen}}{\supseteq} T \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion. Dann gilt:

$\forall t \in T \exists V \underset{\text{offen}}{\subseteq} T$  mit  $t \in V$  und der Eigenschaft, dass  $\Phi$  als Abbildung  $V \rightarrow \Phi(V)$  aufgefasst ein Homöomorphismus ist (d.h.  $\Phi$  ist stetig und bijektiv mit stetiger Inverser  $\Phi(V) \rightarrow V$  [vgl. Definition ??]).

**Beweis:** Für den Fall  $k = n$  folgt die Aussage aus dem Umkehrsatz. Daher nehmen wir also  $k < n$  an.

Sei  $t_* \in T$ , dann gibt es nach (23.1'') Indizes  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , sodass in einer ganzen Umgebung von  $t_*$  gilt  $\det \frac{\partial(\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t) \neq 0$ . OBdA haben wir  $(i_1, \dots, i_k) = (1, \dots, k)$  (sonst nehmen wir einfach eine Umnummerierung der Koordinaten im  $\mathbb{R}^n$  vor).

Die Abbildung  $G := (\Phi_1, \dots, \Phi_k): T \rightarrow \mathbb{R}^k$  ist dann ein lokaler  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus, daher  $\exists V \underset{\text{offen}}{\subseteq} T$  mit  $t_* \in V$  und  $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^k$  mit  $G(t_*) \in U$ , sodass  $\tilde{G} := G|_V: V \rightarrow U$  bijektiv und  $\mathcal{C}^1$  sowie  $\tilde{\Psi} := \tilde{G}^{-1}: U \rightarrow V$  ebenfalls  $\mathcal{C}^1$  ist.

Sei weiters  $H := (\Phi_{k+1}, \dots, \Phi_n)$ , dann ist  $\Phi|_V = (G, H): V \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n-k}$  injektiv.

Schließlich bezeichne  $\bar{\Phi}$  die Abbildung  $V \rightarrow \Phi(V) \subseteq U \times \mathbb{R}^{n-k}$  mit  $t \mapsto \Phi(t)$ . Dann ist  $\bar{\Phi}$  bijektiv mit der Umkehrabbildung  $\Phi(V) \rightarrow V$  gegeben durch  $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \mapsto \tilde{\Psi}(x_1, \dots, x_k)$ . Letztere ist nach Konstruktion auch stetig.  $\square$

Die Bedeutung der Proposition liegt darin, dass wir bei gegebener Immersion  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  stets durch Verkleinerung von  $T$  (also „lokal“) so genannte „Selbstdurchdringungen“ von  $k$ -Flächen (das sind Stellen der Nichtinjektivität von  $\Phi$ , Doppelpunkte usw.) vermeiden können — dies führt auf den Begriff der  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten (oder auch Teilmannigfaltigkeiten) des  $\mathbb{R}^n$ : diese sind lokal stets homöomorph zu offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^k$ .

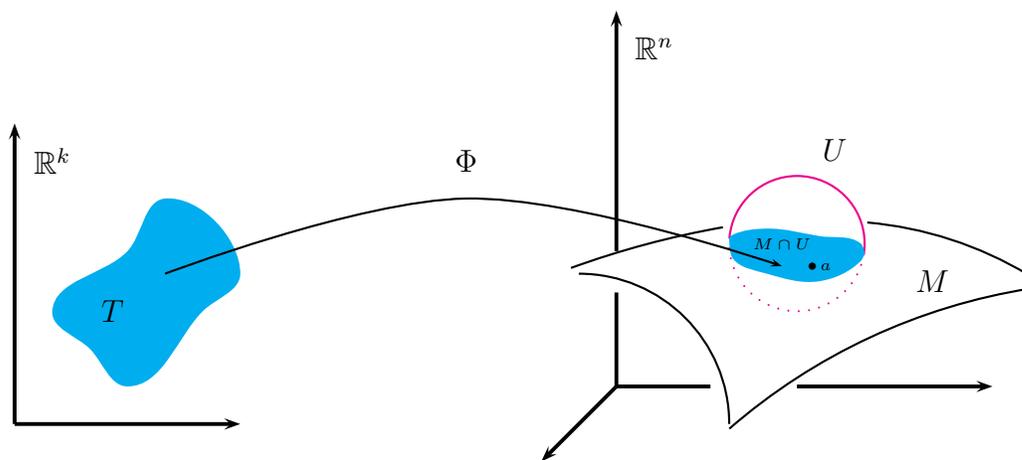
## 23.2. Definition

1.)  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit*<sup>1</sup> von  $\mathbb{R}^n$ , falls gilt:

zu jedem Punkt  $a \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  von  $a$  und  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen sowie eine Immersion  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass gilt:

(a)  $\Phi$  ist ein Homöomorphismus  $T \rightarrow \Phi(T)$

(b)  $\Phi(T) = M \cap U$ .



Wir nennen  $\Phi: T \rightarrow M \cap U$  eine *lokale Parametrisierung* von  $M$  nahe  $a$ ; die Inverse  $\Psi := \Phi^{-1}: M \cap U \rightarrow T \subseteq \mathbb{R}^k$  heißt *Kartenabbildung* (oder nur *Karte*) um  $a$ .

Ist  $M \ni p = \Phi(t_1, \dots, t_k)$ , so sind  $t_1, \dots, t_k$  die *lokalen Koordinaten* von  $p$  bezüglich  $\Phi$ .

Die *Codimension* von  $M$  ist  $n - k$ . Untermannigfaltigkeiten der Codimension 1 nennt man auch *Hyperflächen*.

2.) Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  Untermannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt *differenzierbar* (bzw.  $\mathcal{C}^k$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ ), falls gilt:

zu jedem  $p \in M$  gibt es  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen mit  $p \in U$  und eine differenzierbare (bzw.  $\mathcal{C}^k$ -,  $\mathcal{C}^\infty$ -) Abbildung  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\tilde{f}|_{M \cap U} = f|_{M \cap U}$ .

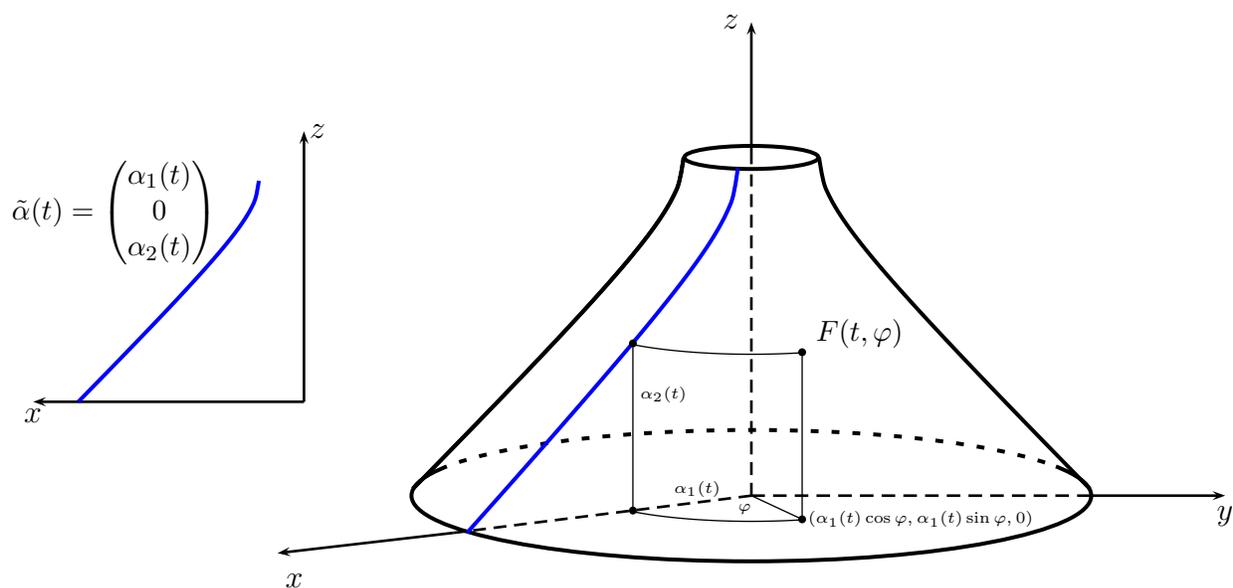
**Bemerkung:** Die Proposition in 23.1 besagt also folgendes: Ist  $\Phi: \mathbb{R}^k \supseteq T \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Immersion und  $t_0 \in T$ , dann  $\exists V \subseteq T$  offen mit  $t_0 \in V$ , so dass  $\Phi(V)$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  ist. Mit anderen Worten: lokal sind  $k$ -Flächen stets  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten.

<sup>1</sup>Der mathematische Begriff „Mannigfaltigkeit“ wurde 1854 von Bernhard Riemann eingeführt.

### 23.3. Beispiele

1.) **Rotationsflächen im  $\mathbb{R}^3$ :** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  ein regulärer Weg, dessen Bildmenge wir als Kurve in der  $xz$ -Ebene auffassen; dann lassen wir jeden Kurvenpunkt  $\tilde{\alpha}(t) := (\alpha_1(t), 0, \alpha_2(t))$  um die  $z$ -Achse rotieren und erhalten so eine 2-parametrische Abbildung

$$F: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad (t, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \cos \varphi \\ \alpha_1(t) \sin \varphi \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}.$$



Wir überprüfen zunächst, ob  $F$  eine Immersion ist: wegen

$$DF(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \cos \varphi & -\alpha_1(t) \sin \varphi \\ \alpha_1'(t) \sin \varphi & \alpha_1(t) \cos \varphi \\ \alpha_2'(t) & 0 \end{pmatrix}$$

unterscheiden wir zwei Fälle:

$\alpha_1(t) = 0$ : es folgt  $\text{Rang } DF(t, \varphi) = 1 < 2$

$\alpha_1(t) \neq 0$ : •  $\alpha_1'(t) \neq 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \cos \varphi & -\alpha_1(t) \sin \varphi \\ \alpha_1'(t) \sin \varphi & \alpha_1(t) \cos \varphi \end{pmatrix} = \alpha_1'(t) \alpha_1(t) \neq 0$ , also hat  $DF(t, \varphi)$  Rang 2

•  $\alpha_1'(t) = 0 \Rightarrow \alpha_2'(t) \neq 0$ , weil  $\alpha$  regulär ist!

Somit hat  $DF(t, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1(t) \sin \varphi \\ 0 & \alpha_1(t) \cos \varphi \\ \alpha_2'(t) & 0 \end{pmatrix}$  in diesem Fall auch Rang 2.

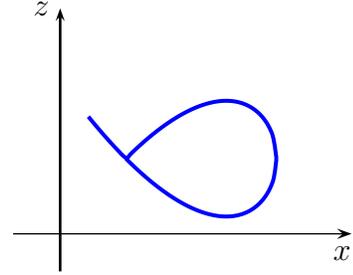
Zusammenfassend haben wir:

$$F \text{ ist Immersion} \iff \forall t \in I: \alpha_1(t) \neq 0 \text{ (kein Schnittpunkt mit der } z\text{-Achse)}$$

$$\iff M := F(I \times \mathbb{R}) \text{ ist eine 2-Fläche im } \mathbb{R}^3$$

**Bemerkungen:** (i) Die Abbildung  $F$  ist wegen  $F(t, \varphi + 2\pi) = F(t, \varphi)$  nicht global injektiv.

(ii) Die Teilmenge  $M = F(I \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^3$  ist im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeit. Wie man sich überlegen kann, tritt dieser Fall z.B. dann ein, wenn die durch  $\alpha$  in der  $xz$ -Ebene definierte Kurve wie in nebenstehender Skizze aussieht, wobei ein offenes Kurvenende beliebig nahe an einen festen Kurvenpunkt heranführt (kein Doppelpunkt!). Es ist übrigens dann auch das Bild von  $\alpha$  keine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^2$ .

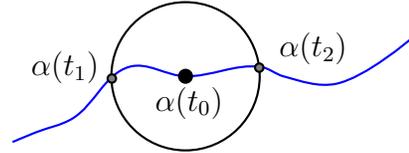


Wir formulieren nun eine zusätzliche Bedingung an  $\alpha$ , die garantieren soll, dass die Rotationsfläche  $M$  auch eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist. Die topologische Bedeutung ist, dass es um jeden Kurvenpunkt beliebig kleine Umgebungen (im  $\mathbb{R}^2$ ) geben soll, innerhalb derer die Kurve aus einem zusammenhängenden Stück besteht:

$$(*) \quad \forall t_0 \in I \exists \delta_1 > 0 \forall \delta > 0 \text{ mit } 0 < \delta < \delta_1$$

$$\quad \exists t_1, t_2 \in I, t_1 < t_0 < t_2 :$$

$$\quad B_\delta(\alpha(t_0)) \cap \alpha(I) = \alpha([t_1, t_2]).$$



**Behauptung:** Ist zusätzlich zu den obigen Annahmen auch (\*) erfüllt, dann ist  $M = F(I \times \mathbb{R})$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^3$  (also eine Hyperfläche).

**Beweis:** Sei  $p \in M$ . Wegen der Rotationsinvarianz dürfen wir OBdA annehmen, dass  $p$  in der  $xz$ -Ebene liegt; daher gibt es ein  $t_0 \in I$ , so dass  $p = (\alpha_1(t_0), 0, \alpha_2(t_0))$ ; d.h.  $p = F(t_0, 0)$ .

Aus Proposition 23.1 folgt, dass  $F$  lokal ein Homöomorphismus  $T_0 \rightarrow F(T_0)$  ist, wobei  $T_0$  eine geeignete Umgebung von  $(t_0, 0)$  ist. Wir wählen  $\delta_1 > 0$  gemäß (\*). Weiters sei  $0 < \delta < \delta_1$  sowie  $\varepsilon > 0$  so klein gewählt, dass mit  $t_1, t_2 \in I$  wie in (\*) auch noch  $[t_1, t_2] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq T_0$  gilt.

Wir setzen  $T := ]t_1, t_2[ \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Dann ist  $\Phi: T \rightarrow F(T)$ ,  $(t, \varphi) \mapsto F(t, \varphi)$  ein Homöomorphismus. Außerdem ist

$$U := \{(x_1 \cos \varphi, x_1 \sin \varphi, x_2) : (x_1, x_2) \in B_\delta(\alpha(t_0)), |\varphi| < \varepsilon\}$$

eine offene Umgebung von  $p$  (bestehend aus allen Rotationen um Winkel zwischen  $-\varepsilon$  und  $\varepsilon$  der  $\delta$ -Scheibe um den Punkt  $p$  in der  $xz$ -Ebene). Nach Konstruktion hat  $U$  die Eigenschaft, dass  $\Phi(T) = F(T) = M \cap U$  ist. Somit ist Definition 23.2 erfüllt.  $\square$

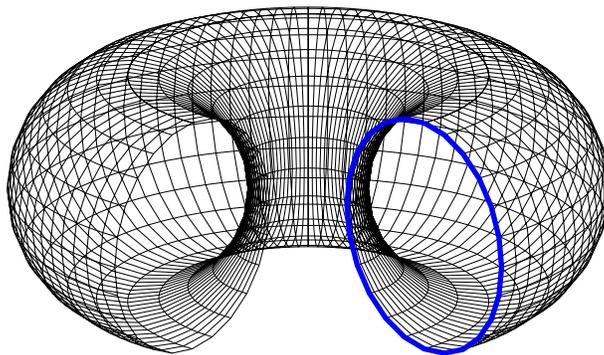
*Bemerkung:* Die Bedingung (\*) bedeutet gerade, dass  $\alpha(I)$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  ist. (Dies folgt aus einem allgemeineren Theorem über 'reguläre Teilmannigfaltigkeiten'; siehe z.B. VO *Differentialgeometrie* von Kollegen Michael Kunzinger, Universität Wien, Sommersemester 2006.)

2.) Der *Torus*<sup>2</sup> ergibt sich als Rotationsfläche wie in 1.) bezüglich eines Kreises:

mit  $0 < r < R$  sei  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$ . Dies erfüllt alle Bedingungen aus 1.) (inklusive (\*)) und die Parametrisierung  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lautet explizit

$$F(t, s) = \begin{pmatrix} (R + r \cos t) \cdot \cos(s) \\ (R + r \cos t) \cdot \sin(s) \\ r \sin t \end{pmatrix}.$$

Der Torus  $M_{r,R} = F(\mathbb{R}^2)$  ist somit eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , also eine Hyperfläche.



In vielen konkreten Fragen über Untermannigfaltigkeiten ist es nicht praktikabel, direkt auf die definierenden Eigenschaften in 22.2 zurückzugehen. Deshalb geben wir im folgenden eine Reihe von äquivalenten Bedingungen.

---

<sup>2</sup>Das lateinische Wort *torus* bezeichnete ein Kissen in der Form eines Kranzes.

## 23.4. Theorem

Für eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $M$  ist eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.
- 2.) *Lokale Darstellung als Graph*:  $\forall a = (a_1, \dots, a_n) \in M$  gilt: zu  $a' := (a_1, \dots, a_k)$  und  $a'' := (a_{k+1}, \dots, a_n)$ , gibt es (eventuell nach Umnummerierung der Koordinaten) offene Mengen  $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$  mit  $a' \in U'$ ,  $a'' \in U''$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $g: U' \rightarrow U''$  mit der Eigenschaft, dass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', g(x')) \in \mathbb{R}^n : x' \in U'\} = \text{Graph von } g$$

(mit anderen Worten: lokal, d.h. innerhalb der Umgebung  $U' \times U''$  von  $a$ , ist  $x \in M$  gleichwertig mit der Relation  $x'' = g(x')$ ).

- 3.) *Lokale Beschreibung als Nullstellenmenge*:  $\forall a \in M$  gibt es eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $a \in U$  und stetig differenzierbare Funktionen  $f_1, \dots, f_{n-k}: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft, dass

$$\text{Rang } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) = n - k \quad \forall x \in M \cap U$$

und

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}.$$

- 4.) *Lokal diffeomorph zu einem  $k$ -dimensionalen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$* : Es bezeichne  $E_k := \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : x_j \in \mathbb{R} \ (j = 1, \dots, k)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ;  $\forall a \in M$  gibt es eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $a \in U$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen sowie einen  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus  $F: U \rightarrow V$  mit der Eigenschaft

$$F(M \cap U) = E_k \cap V.$$

**Beweis:** Wir zeigen 1.)  $\Rightarrow$  2.)  $\Rightarrow$  3.)  $\Rightarrow$  4.)  $\Rightarrow$  1.)

- 1.)  $\Rightarrow$  2.): Sei  $a \in M$ . Laut Definition 23.2 gibt es eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $a \in U$  und  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  offen sowie eine Immersion  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass  $T \rightarrow \Phi(T) = M \cap U$  ein Homöomorphismus ist.

Sei  $t_* \in T$  mit  $\Phi(t_*) = a$ . Wir können OBdA annehmen, dass  $\det \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_k)}{\partial(t_1, \dots, t_k)}(t_*) \neq 0$  gilt. Dann ist  $\tilde{\Phi} := (\Phi_1, \dots, \Phi_k): T \rightarrow \mathbb{R}^k$  ein lokaler  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus, d. h. es gibt  $T_1 \subseteq T$  mit  $t_* \in T_1$  und  $U_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ , so dass  $\tilde{\Phi}: T_1 \rightarrow U_1$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung  $\Psi: U_1 \rightarrow T_1$  ist.

Wir setzen  $G := \Phi \circ \Psi: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  und erkennen  $G(\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{=: x'}) =$

$$= \left( \underbrace{\Phi_1(\Psi(x')), \dots, \Phi_k(\Psi(x'))}_{\tilde{\Phi}(\Psi(x'))=x'}, \underbrace{\Phi_{k+1}(\Psi(x'))}_{=: g_{k+1}(x')}, \dots, \underbrace{\Phi_n(\Psi(x'))}_{=: g_n(x')} \right) = (x', g(x')),$$

wobei  $g := (g_{k+1}, \dots, g_n): U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  stetig differenzierbar ist. Insbesondere gilt für jede Teilmenge  $Y \subseteq U_1$  stets  $\text{Graph}(g|_Y) = G(Y) = \Phi(\Psi(Y)) \subseteq M \cap U$ .

Sei  $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$  offen mit  $a'' \in U''$ , so dass  $U_1 \times U'' \subseteq U$  ist. Wähle weiters  $U' \subseteq U_1$  offen mit  $a' \in U'$  und  $g(U') \subseteq U''$ .

Dann gilt  $\text{Graph}(g|_{U'}) = G(U') \subseteq U' \times g(U') \subseteq U' \times U''$  sowie  $\text{Graph}(g|_{U'}) = G(U') = \Phi(\Psi(U')) \subseteq M \cap U$ . Somit ist einerseits

$$\text{Graph}(g|_{U'}) \subseteq M \cap (U' \times U'').$$

Andererseits folgt für  $(x', x'') \in M \cap (U' \times U'') \subseteq \Phi(T)$ , dass  $x' \in U'$  und  $(x', x'') = \Phi(\tilde{t})$  mit  $\tilde{t} \in T$  gelten muss. Also muss  $\tilde{t} \in \Psi(U')$  sein und somit  $(x', x'') \in \Phi(\Psi(U')) = G(U') = \text{Graph}(g|_{U'})$ ; d.h. zusammenfassend

$$\text{Graph}(g|_{U'}) = M \cap (U' \times U'').$$

2.)  $\Rightarrow$  3.): Sei  $j = 1, \dots, n-k$ ; wir setzen

$$f_j(x_1, \dots, x_n) := x_{k+j} - g_{k+j}(x_1, \dots, x_k)$$

für  $x \in U' \times U''$  mit  $x' = (x_1, \dots, x_k) \in U'$ ,  $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n) \in U''$ .

Wegen  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)} = I_{n-k}$  hat  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$  Rang gleich  $(n-k)$ ; weiters folgt direkt

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', g(x')) : x' \in U'\} = \{(x', x'') : f_j(x', x'') = 0 \ (j = 1, \dots, n-k)\}.$$

3.)  $\Rightarrow$  4.): OBdA (d.h. nach eventueller Umnummerierung) können wir annehmen, dass  $\det \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)}(a) \neq 0$  gilt.

Wir definieren  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $F(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_k, f_1(x), \dots, f_{n-k}(x))$ . Dann hat

$$DF = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)} \end{pmatrix}$$

nahe  $a$  Rang gleich  $n$ , ist also invertierbar. Daher ist  $F$  ein lokaler  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus, d.h. ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus offener Mengen  $W \subseteq U$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $a \in W$ .

Für  $x \in W$  gilt:  $f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0$  ist gleichwertig damit, dass für  $y = F(x)$  gilt  $y_{k+1} = \dots = y_n = 0$ . Daher ist  $F(M \cap W) = E_k \cap V$ .

4.)  $\Rightarrow$  1.): Laut Voraussetzung ist  $F^{-1}: V \rightarrow U$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus; es bezeichne  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  die Projektion  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ .

Wir setzen  $T := p(V) = p(E_k \cap V) \subseteq \mathbb{R}^k$ .

$T$  ist offen: mit der Notation  $B_\varepsilon^X(z)$  für die  $\varepsilon$ -Kugel um  $z$  in einem metrischen Raum  $X$  können wir die Umgebungseigenschaft von  $T$  für jeden Punkt in  $T$  auf die Relation  $B_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(y) \cap E_k = B_\varepsilon^{\mathbb{R}^k}(p(y)) \times \{0\}$  zurückspielen.

Sei  $\Phi: T \rightarrow U$  definiert durch  $\Phi(t_1, \dots, t_k) := F^{-1}(t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$ . Nach Konstruktion ist  $\Phi$  stetig differenzierbar und eine Immersion. Weiters ist

$$\Phi(T) = F^{-1}(T \times \{0\}) = F^{-1}(E_k \cap V) = M \cap U$$

und es gibt eine stetige Inverse vermöge  $M \cap U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{p} T$ , d.h.  $\Phi$  ist ein Homöomorphismus auf sein Bild.

□

## 23.5. Anwendung

Die Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \|x\|^2 - 1$  ist stetig differenzierbar und

$\text{Rang} \frac{\partial f}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \text{Rang} \text{grad} f(x) = \text{Rang} 2x = 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq 0$ .

Somit folgt aus dem obigen Theorem, dass

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: f(x) = 0\}$$

eine Hyperfläche ist, also eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ .

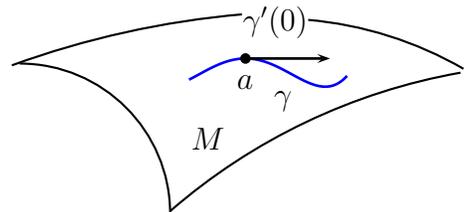
Ein wenig allgemeiner können wir mit dieser Methode eine Fülle von interessanten Untermannigfaltigkeiten als solche erkennen bzw. generieren.

**Korollar:** Es sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq_{\text{offen}} U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $c \in \mathbb{R}$ . Es bezeichne  $N_f(c) = f^{-1}(c) \subseteq \mathbb{R}^n$  die Niveaumenge für den Wert  $c$ . Falls  $\text{grad} f(x) \neq 0$  für alle  $x \in N_f(c)$ , dann heißt  $c$  ein *regulärer Wert* von  $f$  und  $N_f(c)$  ist eine  $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit (also Hyperfläche) im  $\mathbb{R}^n$ .

Kurz gesagt: *Niveaumengen zu regulären Werten sind Hyperflächen.*

## 23.6. Definition

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und  $a \in M$ . Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt *Tangentialvektor* an  $M$  im Punkt  $a$ , wenn gilt: es gibt einen stetig differenzierbaren Weg (bzw. Kurve)  $\gamma: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma(0) = a$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ .



$$T_a(M) := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt *Tangentialraum* in  $a$  an  $M$  und

$$N_a(M) := \{w \in \mathbb{R}^n : \forall v \in T_a(M) \text{ ist } \langle w | v \rangle = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt *Normalraum* in  $a$  an  $M$ . [In Kurzschreibweise:  $N_a(M) = T_a(M)^\perp$ .]

Die Tangential- und Normalräume an alle Punkte einer Untermannigfaltigkeit können formal zusammengefasst werden (man beachte, dass es sich für verschiedene Punkte um verschiedene Mengen handelt): wir nennen

$$T(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a(M)$$

das *Tangentialbündel* an  $M$  und

$$N(M) := \bigcup_{a \in M} \{a\} \times N_a(M)$$

das *Normalenbündel* an  $M$ .

## 23.7. Proposition

Es sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$  und  $a \in M$ .

- 1.)  $T_a(M)$  ist ein  $k$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Für jede lokale Parametrisierung  $\Phi: T \rightarrow M$  nahe  $a$  mit  $\Phi(t_*) = a$  ergibt

$$\{D_1\Phi(t_*), \dots, D_k\Phi(t_*)\}$$

eine Basis von  $T_a(M)$ .

- 2.)  $N_a(M)$  ist ein  $(n - k)$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Wenn  $M$  nahe  $a$  durch Gleichungen beschrieben ist wie in 23.4,3.),

$$\text{d. h. } M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\},$$

wobei  $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $\text{Rang } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) = n - k$ , dann ist

$$\{\text{grad } f_1(a), \dots, \text{grad } f_{n-k}(a)\}$$

eine Basis von  $N_a(M)$ .

**Beweis:** Es seien  $V := \text{span} \{D_j \Phi(t_*) : j = 1, \dots, k\}$  und  $W := \text{span} \{\text{grad } f_j(a) : j = 1, \dots, n - k\}$  (die linearen Erzeugnisse der angegebenen Mengen von Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ ).

Da  $\Phi$  eine Immersion ist, gilt  $\dim V = k$ . Die Rangbedingung in 2.) wiederum ergibt  $\dim W = n - k$ .

Behauptung 1:  $V \subseteq T_a(M)$

Sei  $v \in V$ , d.h.  $v = \sum_{j=1}^k c_j D_j \Phi(t_*)$  mit passenden Skalaren  $c_j \in \mathbb{R}$ . Wir wählen  $\varepsilon$  klein genug, so dass für  $|s| < \varepsilon$  stets  $t_* + s \cdot (c_1, \dots, c_k)$  in  $T$  liegt. Sodann definieren wir den Weg  $\gamma: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  durch

$$\gamma(s) = \Phi(t_* + s \cdot (c_1, \dots, c_k)).$$

Dann ist  $\gamma(0) = \Phi(t_*) = a$  und nach der Kettenregel

$$\gamma'(0) = \sum_{j=1}^k c_j D_j \Phi(t_* + 0 \cdot (c_1, \dots)) = v,$$

daher  $v \in T_a(M)$ .

Behauptung 2:  $W \subseteq N_a(M)$

$N_a(M)$  ist als orthogonales Komplement einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  selbst ein Vektorraum. Es genügt also zu zeigen, dass gilt

$$\langle \text{grad } f_j(a) \mid v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_a(M).$$

Sei  $\gamma: ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  ein  $\mathcal{C}^1$ -Weg mit  $\gamma'(0) = v \in T_a(M)$  und  $\gamma(0) = a$ .

Nachdem  $\gamma(s) \in M$  ist  $\forall s \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  gilt auch  $f_j(\gamma(s)) = 0$ . Daher folgt mittels Differentiation nach  $s$  aus der Kettenregel

$$0 = \sum_{l=1}^n D_l f_j(\gamma(0)) \cdot \gamma'_l(0) = \langle \text{grad } f_j(a) \mid v \rangle.$$

Aus den Behauptungen 1, 2 folgt nun einerseits

$$n - k \leq \dim N_a(M) \leq \dim V^\perp = n - k \text{ und somit } N_a(M) = W$$

sowie

$$V \subseteq T_a(M) \subseteq N_a(M)^\perp, \text{ wobei } \dim V = k = \dim N_a(M)^\perp \text{ und somit } V = T_a(M) \text{ gilt. } \quad \square$$

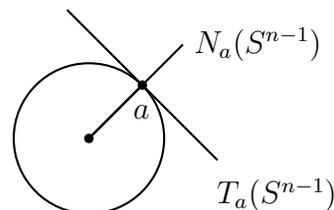
## 23.8. Beispiel

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) := \|x\|^2 - 1 = 0\}$ , daher gilt für jeden Punkt  $a \in S^{n-1}$

$$N_a(S^{n-1}) = \text{span}\{\text{grad } f(a)\} = \text{span}\{2 \cdot a\} = \text{span}\{a\}.$$

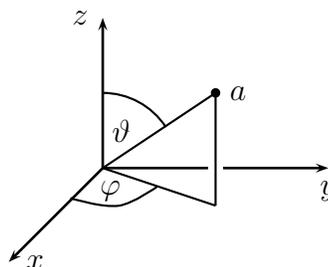
Somit folgt auch

$$T_a(S^{n-1}) = N_a(S^{n-1})^\perp = \{a\}^\perp.$$



Im Spezialfall  $n = 3$  vergleichen wir dies mit der Bestimmung des Tangentialraumes  $T_a(S^2)$  vermöge einer lokalen Parametrisierung durch Polarkoordinaten

$$a = \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$



Dann ist

$$D_1\Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \sin \vartheta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \perp a$$

und

$$D_2\Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} = \cos \vartheta \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \perp a.$$

## 23.9. Nachtrag des Beweises von Theorem 19.13

Wir wiederholen hier nochmals die entscheidende Behauptung in 19.13 bezüglich der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

**Theorem:** Es sei  $f: \mathbb{R}^n \supseteq_{\text{offen}} U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Weiters seien  $r \leq n$  und  $g_1, \dots, g_r: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen mit der Eigenschaft, dass der Rang der Jacobi-Matrix  $D(g_1, \dots, g_r)(x)$  gleich  $r$  (also maximal) ist für alle  $x \in M$ , wobei

$$M := \{x \in U : \underbrace{g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0}_{r \text{ Nebenbedingungen}}\}.$$

Falls  $f|_M$  in  $a \in M$  ein lokales Maximum oder Minimum besitzt, dann existieren  $r$  reelle Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ , die so genannten *Lagrange-Multiplikatoren*, sodass die folgende Gleichung gilt

$$\text{grad } f(a) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot \text{grad } g_j(a).$$

**Beweis:** Wir wissen mittlerweile aus 23.4, dass die oben definierte Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $(n - r)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Es sei  $\gamma: ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$  ein beliebiger  $\mathcal{C}^1$ -Weg mit  $\gamma(0) = a$ . Dann hat die Funktion  $h: ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $h(t) := f(\gamma(t))$ , laut Annahme bei  $t = 0$  ein lokales Extremum. Daher gilt nach der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) \Big|_{t=0} = \langle \text{grad } f(\gamma(0)) \mid \dot{\gamma}(0) \rangle.$$

Wenn wir alle möglichen  $\mathcal{C}^1$ -Wege mit  $\gamma(0) = a$  einsetzen, so durchläuft  $\dot{\gamma}(0)$  den ganzen Tangentialraum  $T_a(M)$ . Somit gilt  $\text{grad } f(a) \in N_a(M)$ .

Nach 23.7 ist  $N_a(M) = \text{span}\{\text{grad } g_j(a) : j = 1, \dots, r\}$ , daher folgt die oben behauptete Darstellung für  $\text{grad } f(a)$ .  $\square$



# Literaturverzeichnis

- [AE99] H. Amann and J. Escher. *Analysis II*. Birkhäuser, Basel, 1999.
- [AE02] H. Amann and J. Escher. *Analysis I*. Birkhäuser, Basel, 2002. 2. Auflage.
- [For05] O. Forster. *Analysis 2*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2005. 6. Auflage.
- [vQ01] B. von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 2001. 4. Auflage.