VI. Das Riemann-Stieltjes Integral.

Es stellt sich heraus, dass der hier entwickelte Integralbegriff stark von der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ abhängt.

Definition. *Sei $[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Unter einer Partition P von $[a,b]$ versteht man ein Menge von Punkten $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit*

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Sei $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$ und für eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ sowie $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ für $i = 1, \ldots, n$. Als Obersumme $S(P,f)$ von f bezüglich P bezeichnen wir den Ausdruck

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

und als Untersumme $s(P,f)$ von f bezüglich P den Ausdruck

$$s(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Das obere Riemann-Integral von f ist definiert durch

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf S(P,f),$$

wobei das Infimum über alle Partitionen P von $[a,b]$ genommen wird, und das untere Riemann- Integral von f ist definiert durch

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup s(P,f),$$

wobei das Supremum über alle Partitionen P von $[a,b]$ genommen wird. Sind die oberen und unteren Integrale gleich, so nennt man f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, man schreibt $f \in \mathcal{R}$. Den gemeinsamen Wert bezeichnet man dann als

$$\int_a^b f\,dx \text{ oder } \int_a^b f(x)\,dx,$$

dies ist das Riemann-Integral von f über $[a,b]$.

Falls $f \geq 0$ und das obere und untere Riemann-Integral übereinstimmen, sagt man auch, dass $\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt angibt, der zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse über $[a,b]$ liegt.
Da f beschränkt ist, gilt $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a,b]$ und daher für jede Partition P von $[a,b]$: $m(b-a) \leq s(P,f) \leq S(P,f) \leq M(b-a)$, sodass das obere und das untere Riemann-Integral immer existiert, die

Frage nach der Gleichheit der oberen und unteren Integrale ist hingegen viel schwieriger.
Wir betrachten eine allgemeinere Situation:

Definition. *Sei* $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine monoton wachsende Funktion. Für eine Partition* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *von* $[a,b]$ *setzen wir*

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\ ,\ i = 1, \ldots, n.$$

Es gilt $\Delta\alpha_i \geq 0$. *Für eine beschränkte Funktion* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *setzen wir*

$$S(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i \text{ und } s(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$$

und definieren

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \inf S(P,f,\alpha) \text{ sowie } \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \sup s(P,f,\alpha),$$

wobei inf *und* sup *über alle Partitionen* P *von* $[a,b]$ *genommen werden. Stimmen die beiden obigen Integrale überein, so sagt man* f *ist bezüglich* α *Riemann-integrierbar und schreibt* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, *den gemeinsamen Wert bezeichnet man mit*

$$\int_a^b f\,d\alpha.$$

Dies ist das Riemann-Stieltjes Integral von f *bezüglich* α *über* $[a,b]$.

Das Riemann-Integral ist ein Spezialfall des Riemann-Stieltjes Integrals für $\alpha(x) = x$.
Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, dass stetige Funktionen f Riemann-integrierbar bezüglich α sind.

Definition. *Die Partition* P^* *wird eine Verfeinerung von* P *genannt, wenn* $P^* \supset P$ *gilt, also jeder Punkt von* P *auch zu* P^* *gehört. Sind* P_1, P_2 *zwei Partitionen, so nennt man* $P^* = P_1 \cup P_2$ *ihre gemeinsame Verfeinerung.*

Satz. *Ist* P^* *eine Verfeinerung von* P, *dann gilt*

$$s(P,f,\alpha) \leq s(P^*, f\alpha) \text{ und } S(P^*,f,\alpha) \leq S(P,f,\alpha).$$

Daraus erhält man nun

Satz.

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha.$$

Für die weiteren Aussagen von besonderer Bedeutung ist das folgende "Cauchy"-Kriterium für die Existenz des Riemann-Stieltjes Integrals

Satz. *Es gilt* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *auf* $[a,b]$ *genau dann, wenn für jedes* $\epsilon > 0$ *eine Partition* P *von* $[a,b]$ *existiert mit*

$$S(P,f,\alpha) - s(P,f,\alpha) < \epsilon.$$

Satz. *(a) Gilt*
$$S(P, f, \alpha) - s(P, f, \alpha) < \epsilon$$
für ein P und ein $\epsilon > 0$, dann gilt diese Aussage mit demselben ϵ für jede Verfeinerung von P.
(b) Gilt die Aussage von (a) für $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ und sind $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, dann gilt
$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \epsilon.$$
(c) Ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ und sind die Voraussetzungen von (b) erfüllt, dann ist
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \epsilon.$$

In den drei nächsten Resultaten werden hinreichende Bedingungen für die Existenz des Riemann-Stieltjes Integrals erstellt.

Satz. *Ist f stetig auf $[a, b]$, dann ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, b]$.*

Satz. *Ist f monoton auf $[a, b]$ und ist α stetig auf $[a, b]$, dann folgt $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Satz. *Sei f beschränkt auf $[a, b]$. Ferner habe f nur endlich viele Unstetigkeitsstellen auf $[a, b]$ und α sei in jedem Punkt stetig, wo f unstetig ist. Dann folgt $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Der folgende Satz ist für Anwendungen von besonderer Bedeutung

Satz. *Sei $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, b]$ und $m \le f \le M$. Sei ferner Φ stetig auf $[m, M]$ und es sei $h(x) = \Phi(f(x))$ für $x \in [a, b]$. Dann folgt $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, b]$.*

Nun stellen wir die wichtigsten Eigenschaften des Integrals zusammen:

Satz. *(a) Sind $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, b]$, so gilt $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ und $cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ für jede Konstante c, ferner gilt*
$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1\, d\alpha + \int_a^b f_2\, d\alpha \;,\; \int_a^b cf\, d\alpha = c\int_a^b f\, d\alpha.$$
Das bedeutet: $\mathcal{R}(\alpha)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und die Abbildung $f \mapsto \int_a^b f\, d\alpha$ ist ein lineares Funktional auf $\mathcal{R}(\alpha)$.
(b) Gilt $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ und $f_1(x) \le f_2(x)$ auf $[a, b]$, so folgt
$$\int_a^b f_1\, d\alpha \le \int_a^b f_2\, d\alpha.$$
(c) Ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, b]$ und ist $a < c < b$, so ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$, und es gilt
$$\int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha.$$

(d) Ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *auf* $[a,b]$ *und gilt* $|f(x)| \leq M$ *auf* $[a,b]$, *so folgt*

$$\int_a^b f\,d\alpha \leq M(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

(e) Für $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ *und* $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$ *gilt* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *und*

$$\int_a^b f\,d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\,d\alpha_1 + \int_a^b f\,d\alpha_2;$$

ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *und ist* c *eine positive Konstante, dann folgt* $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ *und*

$$\int_a^b f\,d(c\alpha) = c\int_a^b f\,d\alpha.$$

Wichtig für alles weitere ist der folgende

Satz. *Seien* $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ *auf* $[a,b]$. *Dann gilt:*
(a) $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$; *(b)* $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ *und*

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\,d\alpha.$$

Der Zusammenhang zwischen Riemann- und Riemann-Stieltjes-Integral wird im folgenden Satz erläutert

Satz. *Sei* α *monoton wachsend und* $\alpha' \in \mathcal{R}$ *auf* $[a,b]$. *Sei ferner* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion. Dann gilt:* $f \in \mathcal{R}(\alpha) \Longleftrightarrow f\alpha' \in \mathcal{R}$. *In diesem Fall ist*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.$$

Satz (Substitutionsregel)**.** *Sei* $\phi : [A,B] \longrightarrow [a,b]$ *eine streng monoton wachsende, stetige Funktion. Sei* $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *monoton wachsend und* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *auf* $[a,b]$. *Definiere* $\beta, g : [A,B] \longrightarrow \mathbb{R}$ *durch* $\beta(y) = \alpha(\phi(y))$ *und* $g(y) = f(\phi(y))$ *für* $y \in [A,B]$. *Dann ist* $g \in \mathcal{R}(\beta)$ *und es gilt*

$$\int_A^B g\,d\beta = \int_a^b f\,d\alpha.$$

Spezialfall: $\alpha(x) = x$ und $\beta = \phi$ mit $\phi' \in \mathcal{R}$ auf $[A,B]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(\phi(y))\phi'(y)\,dy.$$

Integration und Differentiation

Satz. *Sei $f \in \mathcal{R}$ auf $[a,b]$. Für $x \in [a,b]$ setze man*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dann ist F stetig auf $[a,b]$. Ist darüber hinaus f an einer Stelle $x_0 \in [a,b]$ stetig, dann ist F in x_0 differenzierbar und es gilt

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Satz (Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung, 1.Version)**.** *Ist $f \in \mathcal{R}$ auf $[a,b]$ und gibt es eine differenzierbare Funktion F auf $[a,b]$ mit $F' = f$ auf $[a,b]$, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Satz (Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung, 2.Version)**.** *Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, dann ist die Funktion*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \ , x \in [a,b]$$

differenzierbar auf $[a,b]$, es gilt $F'(x) = f(x)$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Definition. *Eine differenzierbare Funktion F auf $[a,b]$ heißt Stammfunktion von f auf $[a,b]$, wenn $F' = f$ auf $[a,b]$ gilt.*
Eine Funktion F auf $[a,b]$ heißt unbestimmtes Integral von f, wenn für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in [a,b]$ gilt

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Es gilt: sind F_1 und F_2 Stammfunktionen (unbestimmte Integrale) von f, so ist $F_1 - F_2$ konstant. Mit F ist auch $F + c \ , c \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f.
Ist f stetig auf $[a,b]$, dann besitzt f eine Stammfunktion F auf $[a,b]$.

f	$\int f\,dx$	Def.ber.
$x^k, k \neq -1$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$	$x \in \mathbb{R}, x \neq 0 (k < 0)$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$x \neq 0$
$x^a, a \in \mathbb{R}, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x > 0$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x\rvert < 1$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq (k+1/2)\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$

Beispiele zur Substitutionsegel:

(a) $\int_\alpha^\beta (a+bu)^n\,du$ $b \neq 0$: setze $x = \phi(u) = a + bu$ und $f(x) = x^n$, dann ist $\phi'(u) = b$ und

$$\int_\alpha^\beta (a+bu)^n\,du = \frac{1}{b}\int_\alpha^\beta (a+bu)^n b\,du = \frac{1}{b}\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} x^n\,dx$$

$$= \frac{1}{b(n+1)}((a+b\beta)^{n+1} - (a+b\alpha)^{n+1})$$

(b) Es sei $\phi(u) > 0$ und stetig differenzierbar auf $[a, b]$, dann gilt für $x = \phi(u)$ und $f(x) = 1/x$:

$$\int_a^b \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\,du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \frac{dx}{x} = \log\frac{\phi(b)}{\phi(a)}.$$

(c) $\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$: hier setze man $x = r\sin t$, dann ist $dx = r\cos t\,dt$ und

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{r^2(1-\sin^2 t)}\,r\cos t\,dt = \int r^2\cos^2 t\,dt$$

(d) $\int \sqrt{r^2 + x^2}\,dx$: hier setze man $x = r\sinh t$, dann ist $dx = r\cosh t\,dt$ und

$$\int \sqrt{r^2 + x^2}\,dx = \int \sqrt{r^2(1+\sinh^2 t)}\,r\cosh t\,dt = \int r^2\cosh^2 t\,dt.$$

Satz (Partielle Integration). *Seien F, G differenzierbar auf $[a, b]$ mit $F' = f \in \mathcal{R}$ und $G' = g \in \mathcal{R}$ auf $[a, b]$. Dann gilt :*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Partialbruchzerlegung :

Ist $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion, wobei der Nenner von der Gestalt

$$q(x) = c(x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_k)^{r_k}(x^2 + a_1 x + b_1)^{s_1} \dots (x^2 + a_m x + b_m)^{s_m}$$

ist, dann kann man durch Koeffizientenvergleich $r(x)$ in der Form

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r_1}}{(x - x_1)^{r_1}} + \dots \\ &+ \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{kr_k}}{(x - x_k)^{r_k}} \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + a_1 x + b_1} + \dots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{s_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_{m1}x + C_{m1}}{x^2 + a_m x + b_m} + \dots + \frac{B_{ms_m}x + C_{ms_m}}{(x^2 + a_m x + b_m)^{s_m}} \end{aligned}$$

schreiben, und die einzelnen Summanden dann einfacher integrieren.

Uneigentliche Integrale

Erweiterung des Riemann-Integrals auf unendliche Intervalle.

Definition. *Sei $f : [a, t] \longrightarrow \mathbb{R}$ in $\mathcal{R}$ auf $[a, t]$ für jedes $t > a$. Konvergiert $\int_a^t f(x)\,dx$ gegen I bei $t \to \infty$, so sagt man das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert und hat den Wert I :*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx = I.$$

Nichtkonvergente Integrale nennt man divergent.

Satz (Cauchy-Kriterium). *$\int_a^\infty f(x)\,dx$ ist genau dann konvergent, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein s_0 existiert mit*

$$\left| \int_s^t f(x)\,dx \right| < \epsilon, \text{ für alle } t > s > s_0.$$

Satz (Montonie-Kriterium). *Sei $f \geq 0$ auf $[a, \infty)$. Dann gilt:*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \exists K > 0 \text{ mit } \int_a^t f(x)\,dx \leq K \text{ , } \forall t > a.$$

Definition. *Das uneigentliche Integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *heißt absolut konvergent, wenn das uneigentliche Integral* $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ *konvergiert.*

Satz. *Ein absolut konvergentes uneigentliches Intgral ist konvergent und es gilt*

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx.$$

Ist $|f| \leq g$ *auf* $[a,\infty)$ *und konvergiert* $\int_a^\infty g(x)\,dx$, *dann ist* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *absolut konvergent.*

Definition. *Wie oben führt man die folgenden uneigentlichen Integrale ein:*

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$$

und für ein $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Integrale und Reihen.

Definition. $I(x) := 0$, $x \leq 0$ *und* $I(x) := 1$, $x > 0$.

Satz. *Ist* $a < s < b$, *ist* f *beschränkt auf* $[a,b]$ *und stetig an der Stelle* s *und ist* $\alpha(x) = I(x-s)$, *dann gilt*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(s).$$

Satz. *Sei* $c_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\sum_n c_n$ *sei konvergent. Ferner sei* $\{s_n\}$ *eine Folge von verschiedenen Punkten in* (a,b) *und*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n I(x-s_n).$$

Sei f *stetig auf* $[a,b]$. *Dann gilt*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^\infty c_n f(s_n).$$

Satz (Integralkriterium für Reihen)**.** *Sei* f *positiv und monoton fallend auf* $[m,\infty)$. *Dann gilt :* $\sum_{k=m}^\infty f(k)$ *und* $\int_m^\infty f(x)\,dx$ *haben dasselbe Konvergenzverhalten.*

Beispiel. $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(\log k)^\alpha}$ *ist genau dann konvergent, wenn* $\alpha > 1$.

Integrale von unbeschränkten Funktionen.

Definition. *Sei* $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *unbeschränkt (bei* $t \to b^-$*). Gilt* $\int_a^t f(x)\,dx \to J$ *bei* $t \to b^-$, *so heißt das uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergent und hat den Wert* J. *Wir schreiben auch*

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx.$$

Analoges gelte bei der unteren Grenze a. *Wir schreiben dann*

$$\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx.$$

Beispiel.

$$\int_0^{1^-} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad \int_{0^+}^{1} \log x\,dx = -1.$$

Definition. *Ist* f *sowohl bei* a *als auch bei* b *unbeschränkt, so setzen wir für ein* $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b^-} f(x)\,dx,$$

falls die rechte Seite existiert.
Ist f *auf* $[a,b]$ *mit Ausnahme eines Punktes* $c \in (a,b)$ *erklärt und existieren*

$$\int_a^{c^-} f(x)\,dx \text{ und } \int_{c^+}^{b} f(x)\,dx,$$

so setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c^-} f(x)\,dx + \int_{c^+}^{b} f(x)\,dx.$$

Integration von vektorwertigen Funktionen

Definition. *Seien* $f_1, \ldots, f_k : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *und* $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$. *Ist* α *auf* $[a,b]$ *monoton wachsend, so schreiben wir* $\mathbf{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$, *wenn* $f_j \in \mathcal{R}(\alpha)$ *auf* $[a,b]$ *für* $j = 1, \ldots, k$ *gilt. In diesem Fall definieren wir*

$$\int_a^b \mathbf{f}\,d\alpha = \left(\int_a^b f_1\,d\alpha, \ldots, \int_a^b f_k\,d\alpha \right).$$

Analog zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

Satz. *Seien* $\mathbf{f}, \mathbf{F} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *und* $\mathbf{f} \in \mathcal{R}$ *auf* $[a,b]$ *und gilt* $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$. *Dann folgt:*

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)\, dx = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung beweist man

Satz. *Es sei* $\mathbf{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *und* $\mathbf{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$. *Dann gilt* $|\mathbf{f}| \in \mathcal{R}(\alpha)$ *und*

$$\left| \int_a^b \mathbf{f}\, d\alpha \right| \leq \int_a^b |\mathbf{f}|\, d\alpha.$$

Rektifizierbare Kurven

Definition. *Eine stetige Abbildung* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *heißt Kurve in* $\mathbb{R}^k$ *mit Parameterintervall* $[a,b]$. *Ist* γ *injektiv, dann wird* γ *ein Bogen genannnt. Gilt* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *dann heißt* γ *eine geschlossene Kurve.*

Eine Kurve ist als Abbildung definiert, und nicht als Teilmenge von $\mathbb{R}^k$. Verschiedene Kurven können ein und denselben Bildbereich haben.

Definition. *Sei* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *eine Kurve und* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *eine Partition von* $[a,b]$.

$$\Lambda(P,\gamma) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|$$

ist die Länge des Polygonzuges mit den Ecken $\gamma(x_0), \gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n)$. *Es sei*

$$\Lambda(\gamma) = \sup_P \Lambda(P,\gamma),$$

wobei das Supremum über alle Partitionen P *von* $[a,b]$ *genommen wird. Ist* $\Lambda(\gamma) < \infty$, *so nennt man* γ *rektifizierbar.*

Satz. *Ist* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *eine stetig differenzierbare Kurve, dann ist* γ *rektifizierbar und es gilt*

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Beispiel. *Sei* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. *Es gilt*

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

und daher

$$\Lambda(\gamma) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Die Abbildung $t \mapsto e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$ *beschreibt genau den Einheitskreis in* $\mathbb{C}$.