Komplexe Analysis I und II

Friedrich Haslinger

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skriptum ist Resultat langjähriger Beschäftigung mit der Komplexen Analysis und mehrmaliger einführender Vorlesungen in dieses Gebiet. Ich habe mich bemüht, neben den herkömmlichen klassischen Themen eine in sich geschlossene Einführung in die moderne Komplexe Analysis zu geben. Schon im ersten Teil (Komplexe Analysis I) wird sehr genau auf die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen eingegangen, um dann im zweiten Teil (Komplexe Analysis II) durch die Behandlung der inhomogenen Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen eine Einführung in moderne , sogenannte reelle Methoden der Komplexen Analysis zu geben, die für die Theorie mehrerer komplexer Veränderlicher besonders wichtig sind. So gesehen ist der gewählte Zugang auch als Vorbereitung für die Komplexe Analysis mehrerer Veränderlicher aufzufassen, die dann auch in einer Fortsetzung zur Vorlesung Komplexe Analysis II behandelt wird.
Die Vorlesung Komplexe Analysis II schließt nahtlos an den ersten Teil an und beginnt Abschnitt 2.9, und zwar mit Eigenschaften holomorpher Funktionen, die sich aus dem Cauchy'schen Integralsatz ergeben, sowie mit Verallgemeinerungen des Cauchy'schen Integralsatzes (inhomogene Cauchy'sche Integralformel, Homologie- und Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes). Der Residuensatz mit einigen Anwendungen zur Berechnung bestimmter, reeller Integrale und das Kapitel über analytische Fortsetzung bilden den Abschluss der eher klassisch gehaltenen Theorie. In den folgenden Abschnitten wird durch die Behandlung der inhomogenen Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen eine Einführung in moderne , sogenannte reelle Methoden der Komplexen Analysis gegeben, die für die Theorie mehrerer komplexer Veränderlicher besonders wichtig sind. So gesehen ist der gewählte Zugang auch als Vorbereitung für die Komplexe Analysis mehrerer Veränderlicher aufzufassen, die dann auch in einer Fortsetzung zur Vorlesung Komplexe Analysis II angeboten wird. Es werden allgemeine Versionen der Sätze von Runge, Mittag-Leffler und Weierstraß erarbeitet, unter Verwendung von funktionalanalytischen Methoden (Satz von Hahn-Banach, siehe Anhang) und von modernen Begriffen, wie holomorpher Konvexität und Kohomologie.
Mit Ausnahme des Residuensatzes und des Riemann'schen Abbildungssatzes habe ich das Skriptum als Ausarbeitung der ersten 30 Seiten des Buches *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables,* [**15**], von Lars Hörmander angelegt. Dieses Buch hat die Entwicklung der Komplexen Analysis in den letzten Jahren nachhaltig beeinflusst. Es besticht nach wie vor durch die Eleganz in der Darstellung der einzelnen Themen.
Das Skriptum endet mit einer umfassenden Charakterisierung des topologischen Begriffes des einfachen Zusammenhangs durch Eigenschaften holomorpher Funktionen und mit einem kurzen Abriss der Theorie harmonischer Funktionen (Dirichlet-Problem).

Wien, im Juni 2008.

Friedrich Haslinger

KAPITEL 1

Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1. Eigenschaften komplexer Zahlen

Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat die beiden Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$.
Euler[1] schreibt 1777 : " formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo."

Definition 1.1. $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Multiplikation in $\mathbb{C}$: $(a, b) \in \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{R},\ (c, d) \in \mathbb{C},\ c, d \in \mathbb{R}$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

$\mathbb{C}$ wird so zu einem kommutativen Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$; ist $(a, b) \neq (0, 0)$, so ist

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Für $(a, b) \in \mathbb{C}$ schreiben wir auch $a + ib$, so entspricht $(a, 0)$ der rellen Zahl a und $(0, 1)$ der imaginären Einheit i.
Die obige Multiplikationsregel entspricht dem formalen Ausmultiplizieren :

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad).$$

Für $z = (x, y)$ können wir dann

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

schreiben; dabei nennt man $x = \Re z$ den <u>Realteil</u> von z und $y = \Im z$ den <u>Imaginärteil</u> von z.
Ist $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$, so benennt man mit

$$\overline{z} = (x, -y) = x - iy$$

die zu z <u>konjugierte Zahl</u>.
Es gelten die folgenden Regeln : $z, w \in \mathbb{C}$: $(z + w)^{-} = \overline{z} + \overline{w},\ \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w},\ \overline{\overline{z}} = z$.
Wir setzen $|z|^2 = z\overline{z}$, $|z|$ ist der <u>Betrag</u> von z. Es gilt $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, für $z = x + iy$, sowie $|z| = |\overline{z}|$.
Weiters gilt:

$$\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$

$$|zw| = |z||w|,\ |z + w| \leq |z| + |w|,\ ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

[1] Euler, Leonhard (1707–1783)

BEISPIELE: $(1-i)^{-1} = \frac{1}{2}(1+i)$, $\frac{1+i}{1-i} = i$, $\left|\frac{1+i}{1-i}\right| = 1$.

1.2. POLARDARSTELLUNG. Sei $z = x + iy \neq 0$. Wir setzen $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$, dabei ist $r = |z|$ der Betrag von z und $\theta = \arg z$ das Argument von z. Es gilt somit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. Es gibt unendlich viele Werte von θ, welche ein und demselben z entsprechen, daher ist es üblich das Hauptargument $\arg z$ von z im Bereich $-\pi < \arg z \leq \pi$ einzugrenzen, dadurch wird die Polardarstellung von z eindeutig.

BEISPIELE:
(a) $z = 2+2i$, $r = |z| = 2\sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$;
(b) $z = 2-2i$, $r = |z| = 2\sqrt{2}$, $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.

Produkte komplexer Zahlen:
Seien $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ und $w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$. Dann gilt

$$zw = rs[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)] =$$
$$rs(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)),$$

es werden also die Beträge multipliziert und die Winkel addiert.
Problem: $\arg(zw) = \arg z + \arg w$?
BEISPIEL:
$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ also $\arg(-1) = \pi$, $i = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2$ also $\arg i = \pi/2$.
$(-1)i = -i = \cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2$ aber $\arg(-i) = -\pi/2$.

de Moivre'sche Formel: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}.$$

Beweis durch Induktion nach n.

1.3. WURZELN AUS KOMPLEXEN ZAHLEN. Sei $n \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dann ist

$$z^{1/n} = r^{1/n}(\cos\theta/n + i\sin\theta/n).$$

Da $z = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$, für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ gilt, ist auch

$$z^{1/n} = r^{1/n}(\cos((\theta + 2k\pi)/n) + i\sin((\theta + 2k\pi)/n))$$

eine n-te Wurzel von z.
Es gibt n verschiedene n-te Wurzeln von z, mit den Argumenten

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta + 2\pi}{n}, \ldots, \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}.$$

1.4. RIEMANN'SCHE ZAHLENKUGEL UND STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION. Sei $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ die Einheitssphäre , $N = (0,0,1)$ der Nordpol auf S^2. S^2 wird in diesem Zusammenhang auch Riemann'sche Zahlenkugel[2]
genannt.
Wir projizieren S^2 vom Nordpol aus stereographisch auf die x_1x_2-Ebene (auf $\mathbb{C}$):
$\xi \in S^2 \setminus \{N\} \mapsto$Schnittpunkt der Verbindungsgeraden zwischen N und ξ mit $\mathbb{C}$.

$$\phi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\ \phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1-x_3}(x_1 + ix_2),$$

[2]Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826–1866)

$$\phi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}\ ,\ \phi^{-1}(x_1 + ix_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(2x_1, 2x_2, x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Die Abbildung ϕ ist bijektiv und in beiden Richtungen stetig.

1.5. Einpunktkompaktifizierung. Durch stetige Fortsetzung von ϕ auf ganz S^2 erhält man einen topologischen Homöomorphismus (eine in beiden Richtungen stetige Bijektion) zwischen dem kompakten Raum S^2 und der sogenannten erweiterten Ebene $\overline{\mathbb{C}}$, der Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$:

$$\phi(N) := \infty\ ,\ \phi^{-1}(\infty) := N\ \ \phi(S^2) = \overline{\mathbb{C}}.$$

1.2. Einige topologische Begriffe

Definition 1.6. Sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. z_0 heißt Häufungspunkt der Folge , wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt : es liegen unendlich viele Glieder der Folge in

$$K_\epsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \epsilon\}.$$

z_0 heißt Limes (Grenzwert) der Folge, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$|z_n - z_0| < \epsilon\ ,\ \forall n > n_\epsilon.$$

Die Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ nennt man Cauchyfolge [3] , wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein ein $n_\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$|z_n - z_m| < \epsilon\ ,\ \forall n, m > n_\epsilon.$$

Jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ ist konvergent (besitzt einen Limes). (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$)

Bemerkung.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\ ,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0\ ,\text{wo } z_n = x_n + iy_n,\ z_0 = x_0 + iy_0.$$

Definition 1.7. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$. G ist offen, wenn $\forall z \in G\ \exists \epsilon > 0$, sodass $K_\epsilon(z) \subseteq G$. Eine Menge $U \subset X$ heißt Umgebung der Menge $M \subset X$, falls es eine in X offene Menge V mit $M \subset V \subset U$ gibt. $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.
Es gilt: die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen; der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen; die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen; der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Menge in $\mathbb{C}$.

$$M^\circ := \bigcup\{U : U \subseteq M,\ U \text{ offen}\}$$

heißt Inneres von M; M° ist eine offene Menge und zwar die größte offene Menge, welche in M enthalten ist (M° kann natürlich auch leer sein).

$$\overline{M} := \bigcap\{A : A \supseteq M,\ A \text{ abgeschlossen}\}$$

heißt Abschluss von M; $\overline{M}$ ist eine abgeschlossene Menge und zwar die kleinste abgeschlossene Menge, welche M enthält.
$\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt Rand von M .

[3] Cauchy, Augustin Louis (1789–1857)

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Menge in $\mathbb{C}$. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt relativ offen in M, wenn eine in $\mathbb{C}$ offene Menge O existiert mit $U = O \cap M$; eine Teilmenge $B \subseteq M$ heißt relativ abgeschlossen in M, wenn eine in $\mathbb{C}$ abgeschlossene Menge A existiert mit $B = A \cap M$.

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt zusammenhängend, wenn aus $X = X_1 \cup X_2$ mit $X_1 \cap \overline{X}_2 = \overline{X}_1 \cap X_2 = \emptyset$ folgt, dass eine der beiden Mengen X_1, X_2 leer ist. Eine offene, zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt Gebiet. Gebiete in $\mathbb{C}$ sind auch wegweise zusammenhängend (je zwei Punkte können durch eine stetige, ganz in der Menge verlaufende Kurve verbunden werden) und umgekehrt. Ist $X \subseteq \mathbb{C}$ und $x \in X$, so wird mit E_x die größte zusammenhängende Menge bezeichnet, die x enthält. E_x heißt Zusammenhangskomponente von X. Die Menge X ist die Vereinigung aller ihrer Zusammenhangskomponenten.

Sei $N \subseteq M \subseteq \mathbb{C}$. N liegt dicht in M, wenn $\overline{N} \supseteq M$.
(Beispiel: $\mathbb{Q}^2 = \{(r, s) : r, s \in \mathbb{Q}\}$ liegt dicht im $\mathbb{R}^2$.)
Sei $N \subseteq M \subseteq \mathbb{C}$. N liegt diskret in M, wenn für jedes $z \in M$ eine Umgebung U (also etwa eine offene Kreischeibe mit Mittelpunkt z) existiert, sodass $U \cap N$ höchtens endlich viele Elemente besitzt.
Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Es gilt: K ist kompakt $\Leftrightarrow$ K ist abgeschlossen und beschränkt (d.h. $\exists C > 0$ mit $|z| \leq C,\ \forall z \in K$).
Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge in $\mathbb{C}$. U ist relativ kompakt in M (wir schreiben $U \subset\subset M$), wenn $\overline{U} \subseteq M$ und $\overline{U}$ kompakt ist.

Definition 1.8. Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir zerlegen $f(z)$ in Real–und Imaginärteil: $f(z) = u(z) + iv(z) = \Re f(z) + i\Im f(z)$, dabei sind $u, v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen.
Die Menge $\{(z, w) : f(z) = w,\ z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^2$ heißt Graph von f.
Die Mengen $\{z : \Re f(z) = \text{const.}\}$, $\{z : \Im f(z) = \text{const.}\}$, $\{z : |f(z)| = \text{const.}\}$ nennt man Niveaulinien von f.

Beispiele: a) $f(z) = z^2,\ \Re f(z) = x^2 - y^2,\ \Im f(z) = 2xy$. Die Niveaulinien sind in diesem Falle Hyperbeln bzw. Kreise.
b) $f(z) = az,\ a \in \mathbb{C},\ a \neq 0$. Das ist eine Drehstreckung. Wir setzen für $a = \alpha + i\beta$, dann ist

$$az = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y).$$

Fass t man f als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auf, so erhält man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei

$$\cos\gamma = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}\ ,\ \sin\gamma = \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}.$$

Definition 1.9. Sei $O \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, $f : O \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt stetig im Punkt $z_0 \in O$, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$, sodass

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{für} \quad |z - z_0| < \delta.$$

f heißt stetig auf einer Menge M, wenn f in jedem Punkt von M stetig ist.

Es gilt: f ist stetig in $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow$ für jede Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ ist $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = f(z_0)$.
f und g stetig $\Rightarrow f+g,\ f.g,\ \frac{f}{g}(g \neq 0)$ stetig.
f stetig $\Leftrightarrow \Re f$ und $\Im f$ stetig.
f stetig $\Rightarrow |f|$ stetig.
Ist f stetig auf einer kompakten Menge K, dann nehmen $\Re f,\ \Im f,\ |f|$ auf K ihr Maximum bzw. Minimum an, d.h.

$$\sup_{z\in K} |f(z)| = \max_{z\in K} |f(z)| = |f(z_1)|\ ,\ \text{für} \quad \text{ein}\ \ z_1 \in K,$$

$$\inf_{z\in K} |f(z)| = \min_{z\in K} |f(z)| = |f(z_2)|\ ,\ \text{für} \quad \text{ein}\ z_2 \in K.$$

Ist außerdem $f \neq 0$ auf K, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(z)| \geq \delta\ ,\ \forall z \in K.$$

1.3. Holomorphe Funktionen

Definition 1.10. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, wenn eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : U \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert, sodass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z),\ \ z \in U$$

gilt.
f heißt holomorph auf U , $f \in \mathcal{H}(U)$, wenn f in jedem $z \in U$ komplex differenzierbar ist.
f heißt holomorph in $z_0 \in U$, wenn eine offene Umgebung U_0 von z_0 existiert, sodass f auf U_0 holomorph ist.

Bemerkung. Ist f komplex differenzierbar in z_0, so gilt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \Delta(z)\ ;\ \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \Delta(z_0) = f'(z_0).$$

Satz 1.11. *Seien f und g komplex differenzierbar in z_0. Dann sind $f + g$ und $f \cdot g$ ebenfalls komplex differenzierbar in z_0. Weiters ist λf für $\lambda \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0. Es gelten die folgenden Differentiationsregeln:*

$$(f+g)' = f' + g'\ ,\ (\lambda f)' = \lambda f'\ ,\ (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Ist $g(z_0) \neq 0$, dann gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Sei $w_0 = f(z_0)$ und h komplex differenzierbar in w_0. Dann folgt :

$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))f'(z_0) \quad \textit{(Kettenregel)}.$$

Sei $f : U \longrightarrow V$ holomorph und bijektiv, sowie $f'(z) \neq 0\ ,\ \forall z \in U$. Dann ist $f^{-1} : V \longrightarrow U$ holomorph und es gilt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}\ ,\ \forall w \in V.$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes läss t sich wortwörtlich vom reellen Fall übertragen. ∎

Beispiele: a) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ &= n z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

b) $f(z) = \overline{z}$. Wir führen den Grenzübergang $z \to z_0$ zunächst parallel zur x-Achse durch: $z - z_0 = h \in \mathbb{R},\ h \to 0$

$$\frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \frac{h}{h} = 1;$$

anschließend parallel zur y-Achse: $z - z_0 = ih,\ h \in \mathbb{R},\ h \to 0$

$$\frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = \frac{-ih}{ih} = -1.$$

Somit ist $f(z) = \overline{z}$ in keinem Punkt komplex differenzierbar.

1.4. Die Cauchy– Riemann'schen Differentialgleichungen

Definition 1.12. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
g ist reell differenzierbar in $z_0 \in U$, wenn in z_0 stetige Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ existieren mit

$$g(z) = g(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z), \tag{1.1}$$

wobei $z = x + iy$ und $z_0 = x_0 + iy_0$.

Es gilt : $\Delta_1(z_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = g_x(z_0)$ partielle Ableitung nach x, $\Delta_2(z_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = g_y(z_0)$ partielle Ableitung nach y, dazu wähle man zunächst $z = x + iy_0$, dann folgt aus (1.1)

$$\Delta_1(z) = \frac{g(z) - g(z_0)}{x - x_0}$$

und bei $x \to x_0$ die Aussge über die partielle Ableitung nach x. Wählt man für $z = x_0 + iy$ und verfährt analog, so folgt die Aussage über die partielle Ableitung nach y.
Außerdem ist jede in z_0 reell differenzierbare Funktion auch in z_0 stetig

Beispiel 1.13. Sei

$$u(z) = \begin{cases} \frac{xy}{|z|^2} & \text{falls } z \neq 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

Dann ist u in $z = 0$ unstetig, denn

$$\lim_{n \to \infty} u(1/n, 1/n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2} \neq u(0,0) = 0.$$

Es existieren jedoch die partiellen Ableitungen $u_x(0,0) = u_y(0,0) = 0$:

$$u_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = 0.$$

Es gilt : sind u_x und u_y stetig in z_0, dann ist u in z_0 reell differenzierbar. (Mittelwertsatz für Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.)

Sei nun f komplex differenzierbar in z_0. Für reelles h existieren die beiden Limiten

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \text{ und } \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}$$

und sind gleich. Zerlegt man $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ in Real– und Imaginärteil, so folgt

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{ih} + i\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{ih}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $u_x(z_0)+iv_x(z_0) = 1/i(u_y(z_0)+iv_y(z_0))$ und nach Trennung in Real– und Imaginärteil erhalten wir

$$\begin{aligned} u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\ v_x(z_0) &= -u_y(z_0). \end{aligned}$$

Dieses System von zwei partiellen Differentialgleichungen mit den beiden Unbekannten u und v nennt man die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen.
Wir haben folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.14. *Sei f komplex differenzierbar in z_0 und $f=u+iv$ die Zerlegung in Real– und Imaginärteil. Dann gilt*

$$\begin{aligned} u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\ v_x(z_0) &= -u_y(z_0). \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$f'(z_0) = u_x(z_0)+iv_x(z_0) = v_y(z_0)-iu_y(z_0).$$

Definition 1.15. Sei $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$. f ist in z_0 reell differenzierbar, wenn in z_0 stetige Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ existieren, sodass

$$f(z) = f(z_0) + (x-x_0)\Delta_1(z) + (y-y_0)\Delta_2(z), z\in U.$$

Es gilt wieder

$$\Delta_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f_x(z_0) \quad \text{und} \quad \Delta_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = f_y(z_0)\ .$$

Lemma 1.16. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*
(1) $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ ist in z_0 reell differenzierbar;
(2) Real– und Imaginärteil von $f=u+iv$ sind in z_0 reell differenzierbar;
(3) es existieren in z_0 stetige Funktionen $A_1, A_2 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)A_1(z) + (z-z_0)^{-}A_2(z),$$

dabei ist

$$A_1(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)) \text{ und } A_2(z_0) = \frac{1}{2}(f_x(z_0)+if_y(z_0)).$$

Beweis. Für $f=u+iv$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (x-x_0)\Delta_1(z) + (y-y_0)\Delta_2(z) \\ &= u(z_0) + (x-x_0)\Re\Delta_1(z) + (y-y_0)\Re\Delta_2(z) \\ &\quad + i[v(z_0) + (x-x_0)\Im\Delta_1(z) + (y-y_0)\Im\Delta_2(z)]. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Äquivalenz von (1) und (2), sowie

$$f_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) \text{ und } f_y(z_0) = u_y(z_0) + iv_y(z_0).$$

Weiters rechnet man leicht nach, dass

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z) \\ &= f(z_0) + [(x - x_0) + i(y - y_0)]\frac{1}{2}(\Delta_1(z) - i\Delta_2(z)) \\ &\quad + [(x - x_0) - i(y - y_0)]\frac{1}{2}(\Delta_1(z) + i\Delta_2(z)) \\ &= f(z_0) + (z - z_0)A_1(z) + (z - z_0)^- A_2(z), \end{aligned}$$

wobei

$$A_1(z) = \frac{1}{2}(\Delta_1(z) - i\Delta_2(z)) \text{ und } A_2(z) = \frac{1}{2}(\Delta_1(z) + i\Delta_2(z)).$$

□

Diese Aussagen legen die folgende Begriffsbildung nahe:

Definition 1.17. Wirtinger–Ableitungen[4]

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \ , \ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Satz 1.18. *$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ genügt den Cauchy– Riemann'schen Differentialgleichungen in $z_0 \in U \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.*

Beweis. Durch Zerlegung in Real– und Imaginärteil erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[u_x - v_y + i(v_x + u_y)\right]. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Leftrightarrow u_x = v_y \ , \ u_y = -v_x.$$

□

Bemerkung. Der Vorteil in der eben eingeführten Notation besteht darin, dass sich das System von partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\ v_x(z_0) &= -u_y(z_0). \end{aligned}$$

durch die eine Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

ausdrücken läss t.

Satz 1.19. *Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$.*
f ist in z_0 komplex differenzierbar $\Leftrightarrow$ f ist in z_0 reell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.
Es gilt dann $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

[4]Wirtinger, Wilhelm (1865–1945)

Beweis. $(\Rightarrow)$: $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z)$, wobei Δ in z_0 stetig ist. Setze $A_1 = \Delta, A_2 = 0$, dann ist $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)A_1(z)$ und nach Lemma 1.16 ist f reell differenzierbar, da $A_2 = 0$ sind die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt.
$(\Leftarrow)$: ist f reell differenzierbar in z_0, dann existiert nach 1.16 in z_0 stetige Funktionen A_1 und A_2 mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)A_1(z) + (z - z_0)^- A_2(z),$$

und nach Voraussetzung ist $A_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. Sei

$$\tilde{\Delta}(z) = \begin{cases} \frac{A_2(z)(z-z_0)^-}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Da A_2 in z_0 stetig ist und $A_2(z_0) = 0$ sowie $\left|\frac{(z-z_0)^-}{z-z_0}\right| = 1$, gilt $\lim_{z\to z_0} \tilde{\Delta}(z) = 0$ und daher ist $\tilde{\Delta}$ in z_0 stetig.
Wir setzen $\Delta = A_1 + \tilde{\Delta}$. Dann ist Δ in z_0 stetig und es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)A_1(z) + (z - z_0)^- A_2(z) \\ &= f(z_0) + (z - z_0)\left[A_1(z) + \frac{A_2(z)(z - z_0)^-}{z - z_0}\right] \\ &= f(z_0) + (z - z_0)(A_1(z) + \tilde{\Delta}(z)) \\ &= f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z), \end{aligned}$$

und somit ist f in z_0 komplex differenzierbar. □

Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen lassen sich wesentlich abschwächen, so gilt z.B.

Satz 1.20 (Satz von Looman–Menchoff). *Sei $f = u + iv : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Existieren alle partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y auf ganz U und erfüllen die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen, so ist f auf U komplex differenzierbar.*

Beweis. Einen Beweis findet man in [**24**] (vergleiche auch mit dem Beispiel 1.13). □

Beispiele.
(1) $f = u + iv,\ u(x, y) = x^2 - y^2,\ v(x, y) = 2xy$. f ist auf ganz $\mathbb{C}$ reell differenzierbar, ferner gilt $u_x = 2x,\ u_y = -2y,\ v_x = 2y,\ v_y = 2x$, also gelten die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen. f ist daher auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und auch auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Es gilt

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

(2) $f = u + iv,\ u(x, y) = x^3 - 3xy^2,\ v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Auch hier gelten die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen, f ist daher auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; $f(z) = z^3$.
(3)$f = u+iv,\ u(x, y) = e^x \cos y,\ v(x, y) = e^x \sin y$. Wiederum sind die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt und f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. f ist die komplexe Exponentialfunktion (siehe 1.8.), es gilt

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

(4) $f = u + iv,\ u(x, y) = x^3y^2,\ v(x, y) = x^2y^3$. f ist auf ganz $\mathbb{C}$ reell differenzierbar. $u_x = 3x^2y^2,\ v_y = 3x^2y^2,\ u_y = 2x^3y,\ v_x = 2xy^3$. Die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen sind genau dann erfüllt, wenn $(x^2 + y^2)xy = 0$ ist, d.h genau auf den Punkten der Koordinatenachsen, somit ist f in allen Punkten der Koordiantenachsen komplex differenzierbar, aber dort <u>nicht</u> holomorph.

Bemerkung. (1) Wirtinger Kalkül : Beim Differenzieren nach den komplex konjugierten Variablen z und $\overline{z}$ kann man so vorgehen, als wären z und $\overline{z}$ voneinander unabhängige Veränderliche.
Beispiel. $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{z}$, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = z$. f ist für $z = 0$ komplex differenzierbar, aber im Nullpunkt nicht holomorph.

(2) $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sind $\mathbb{C}$–lineare Operatoren, d.h. für $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar und für $c, d \in \mathbb{C}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial z}(cf + dg) = c\frac{\partial f}{\partial z} + d\frac{\partial g}{\partial z} \ , \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(cf + dg) = c\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + d\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\Delta f\end{aligned}$$

Der Operator Δ heißt Laplace Operator[5].

(4) Seien $f, \varphi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbare Funktionen. Die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \varphi$$

nennt man inhomogene Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichung. Sie entspricht dem System von 2 partiellen Differentialgleichungen

$$1/2(u_x - v_y) = \Re\varphi \ , \ 1/2(u_y + v_x) = \Im\varphi.$$

1.5. Die geometrische Bedeutung der Ableitung

Definition 1.21. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar auf U. Man kann f auch als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auffassen, und zwar durch Zerlegung in Real– und Imaginärteil : $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

$$J_f = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x.$$

J_f ist die Jacobi–Determinante [6] von f.

Bemerkung. Ist f komplex differenzierbar, dann gelten die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Somit ist

$$J_f = u_x^2 + v_x^2.$$

Da nach 1.14 $f' = u_x + iv_x$ gilt, ist $|f'|^2 = u_x^2 + v_x^2$ und daher

$$J_f = |f'|^2.$$

[5]Laplace, Pierre Simon (1749–1827)
[6]Jacobi, Carl Gustav (1804–1851)

Definition 1.22. Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in U$. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = 0.$$

Sei

$$(Tf(z_0))(h) := f'(z_0)h \ , \ h \in \mathbb{C}.$$

$(Tf(z_0)) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt <u>Tangentialabbildung</u> von f im Punkt z_0, sie ist $\mathbb{C}$–linear.

Bemerkung. Ist f nur reell differenzierbar in z_0, dann folgt nach 1.16

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)A_1(z) + (z - z_0)^{-}A_2(z).$$

Wir setzen für $h = z - z_0$ und setzen dann

$$(Tf(z_0))(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)h + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\overline{h},$$

diese Abbildung $(Tf(z_0)) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist i.a. nur $\mathbb{R}$–linear.
Es gilt: f ist in z_0 komplex differenzierbar $\Leftrightarrow (Tf(z_0)) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$–linear.

Definition 1.23. Sei $\mathcal{T} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine bijektive $\mathbb{R}$–lineare Abbildung, für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ sei $\langle z, w\rangle = \Re(z\overline{w}) = xu + yv$ das euklidische Skalarprodukt im reellen Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
$\mathcal{T}$ heißt <u>winkeltreu</u>, wenn

$$|z||w|\langle \mathcal{T}z, \mathcal{T}w\rangle = |\mathcal{T}z||\mathcal{T}w|\langle z, w\rangle \ \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Bemerkung. Ist φ der von z und w eingeschlossene Winkel, so gilt

$$\cos\varphi = \frac{\langle z, w\rangle}{|z||w|},$$

somit bedeutet die obige Bedingung, dass der von $\mathcal{T}z$ und $\mathcal{T}w$ eingeschlossene Winkel mit dem ursprünglichen übereinstimmt.

Definition 1.24. Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ reell differenzierbar auf U.
f ist <u>winkeltreu in $z_0 \in U$</u>, wenn die Tangentialabbildung $(Tf(z_0)) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ winkeltreu ist.
f heißt <u>winkeltreu auf U</u>, wenn f für jedes $z \in U$ winkeltreu ist.

Satz 1.25. *Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf U und $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$. Dann ist f winkeltreu auf U.*

Beweis. Nach 1.22 gilt $(Tf(z))(h) = f'(z)h$. Es ist zu zeigen, dass

$$|h||k|\langle (Tf(z))(h), (Tf(z))(k)\rangle = |(Tf(z))(h)||(Tf(z))(k)|\langle h, k\rangle \ , \ \forall h, k \in \mathbb{C}.$$

Die linke Seite ist

$$|h||k|\langle f'(z)h, f'(z)k\rangle = |h||k|\Re(f'(z)h\overline{f'(z)k}) = |h||k||f'(z)|^2\Re(h\overline{k}),$$

die rechte Seite :

$$|f'(z)h||f'(z)k|\Re(h\overline{k}) = |f'(z)|^2|h||k|\Re(h\overline{k}).$$

□

Definition 1.26. Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ stetig. γ ist eine Kurve in $\mathbb{C}$ (siehe Abschnitt 1, Kapitel 2). Wir zerlegen in Real– und Imaginärteil

$$t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t) \ , \ t \in [a, b].$$

γ ist differenzierbar in $s \in (a, b)$, wenn die Ableitungen $x'(s)$ und $y'(s)$ existieren. Wir setzen $\gamma'(s) = x'(s) + iy'(s)$.

Sei $z = \gamma(s)$ und $\gamma'(s) \neq 0$. Durch

$$t \mapsto z + \gamma'(s)\, t \ , \ t \in \mathbb{R}$$

ist die Tangente im Punkt $z = \gamma(s)$ an die Kurve γ gegeben.
Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so kann man die Bildkurve

$$f \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

betrachten:

$$t \mapsto f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \ , \ \gamma(t) = z = x(t) + iy(t).$$

Aus der Kettenregel folgt nun

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)'(s) &= u_x(z)x'(s) + u_y(z)y'(s) + i[v_x(z)x'(s) + v_y(z)y'(s)] \\
&= 1/2[u_x(z) + iv_x(z) - i(u_y(z) + iv_y(z))](x'(s) + iy'(s)) \\
&\quad + 1/2[u_x(z) + iv_x(z) + i(u_y(z) + iv_y(z))](x'(s) - iy'(s)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(z)(x'(s) + iy'(s)) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)(x'(s) - iy'(s)) \text{ (nach 1.17)} \\
&= (Tf(z))(\gamma'(s)) \text{ (nach 1.22)}.
\end{aligned}$$

Falls $(f \circ \gamma)'(s) \neq 0$, so hat die Bildkurve die Tangente

$$t \mapsto f(z) + (f \circ \gamma)'(s)\, t = f(z) + (Tf(z))(\gamma'(s))\, t \ , \ t \in \mathbb{R}$$

im Punkt $f(z)$.
Nun seien γ_1 und γ_2 zwei Kurven durch z. Der Schnittwinkel der beiden Kurven im Punkt z ist durch den Schnittwinkel der Tangenten in z gegeben. Die Richtungsvektoren der Tangenten sind $\gamma_1'(s)$ bzw. $\gamma_2'(s)$ und der Schnittwinkel der Kurven im Punkt z ist somit $\sphericalangle(\gamma_1'(s), \gamma_2'(s))$. Andererseits ist der Schnittwinkel der Bildkurven im Punkt $f(z)$ gegeben durch $\sphericalangle((Tf(z))(\gamma_1'(s)), (Tf(z))(\gamma_2'(s)))$. Ist f in z komplex differenzierbar und $f'(z) \neq 0$, so folgt nach Satz 1.25

$$\sphericalangle(\gamma_1'(s), \gamma_2'(s)) = \sphericalangle((Tf(z))(\gamma_1'(s)), (Tf(z))(\gamma_2'(s))).$$

Beispiel: $f(z) = z^2$, $f'(z) = 2z$, $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\mathbb{C}^*$ heißt die punktierte Ebene. Dann ist $f = u + iv$ mit $u(x, y) = x^2 - y^2$ und $v(x, y) = 2xy$. Wir bezeichnen die Koordinaten im Quellenraum mit x, y, jene im Bildraum mit u, v.
Die Parallelen zur y–Achse mit der Gleichung $x = a$ werden durch f in die Parabeln $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$ mit gemeinsamen Brennpunkt $(0, 0)$ übergeführt. Die Parallelen zur x–Achse mit der Gleichung $y = b$ werden durch f in die Parabeln $v^2 = 4b(b^2 + u)$ mit gemeinsamen Brennpunkt $(0, 0)$ übergeführt. Dies folgt durch Einsetzen in die obigen Formeln für u und v und durch Elimination von x bzw. y.
Man erkennt leicht, dass die Winkel zwischen den Kurven im Quellenraum und jenen im Bildraum erhalten bleiben (siehe auch Beispiele in den Übungen).

1.6. Gleichmäßige Konvergenz

Definition 1.27. Sei $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, $A \subseteq U$. $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ <u>konvergiert gleichmäßig auf A</u> gegen eine Funktion f, wenn $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \ , \ \forall n > n_\epsilon \text{ und } \forall z \in A.$$

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig auf A, wenn die Folge ihrer Partialsummen $\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)_N$ gleichmäßig auf A konvergiert.
Wir schreiben $|f|_A := \sup_{z\in A}|f(z)|$.

Satz 1.28. *Sei $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
(1) $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf $A \subseteq U$;
(2) $(f_n)_n$ ist eine Cauchyfolge auf A, d.h. $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n - f_m|_A < \epsilon \quad , \forall m, n > n_\epsilon.$$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): $(f_n) \to f$ gleichmäßig auf A, dann ist

$$|f_n - f_m|_A \le |f_n - f|_A + |f - f_m|_A < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

falls n, m genügend groß sind.
(2) $\Rightarrow$ (1): $\forall z \in A$ gilt :

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le |f_n - f_m|_A < \epsilon \;,\; \forall n, m > n_\epsilon.$$

Für fixes $z \in A$ ist somit $(f_n(z))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, existiert der Limes dieser Folge:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

(punktweise Konvergenz). Für ein beliebiges $z \in A$, wähle man $m_0 = m(z)$ so, dass $|f_m(z) - f(z)| < \epsilon \;,\; \forall m > m_0$. Dann folgt für beliebiges $z \in A$:

$$|f_n(z) - f(z)| \le |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f(z)| < \epsilon + \epsilon$$

$\forall n > n_\epsilon \;,\; \forall m > m_0$. □

Satz 1.29. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergiert gleichmäßig auf $A \;\Leftrightarrow\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$, sodass*

$$|f_{m+1}(z) + \cdots + f_n(z)| < \epsilon \;,\; \forall n > m \ge n_\epsilon \;\; \textit{und}\; \forall z \in A.$$

Beweis. Da

$$f_{m+1}(z) + \cdots + f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z) - \sum_{k=1}^{m} f_k(z),$$

folgt der Satz sofort aus Satz 1.28. □

Satz 1.30 (Majoranten–Kriterium von Weierstraß). [7] *Sei $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen mit*

$$\sup_{z\in A}|f_n(z)| = |f_n|_A \le M_n \;,\; M_n \ge 0.$$

Ferner sei $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf A.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Es existiert n_ϵ mit

$$|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(z)| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(z)| \le \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \epsilon,$$

$\forall n > m \ge n_\epsilon$ und $\forall z \in A$; nun folgt die Behauptung aus Satz 1.29 □

[7] Weierstraß, Karl Theodor Wilhelm (1815–1897)

Beispiele. 1) $f_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. $f_n \to 0$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Ist $K \subset \mathbb{D}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{D}$, dann existiert $0 < r < 1$ mit $K \subset D_r(0) = \{z : |z| < r\}$, und es folgt

$$|f_n(z)| = |z^n| \leq r^n \to 0 \ , \ \forall z \in K.$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$. Sei K wie in Beispiel 1), dann gilt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n < \infty,$$

$\forall z \in K$, nun ergibt Satz 1.30 die Behauptung.
3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ist K kompakt in $\mathbb{C}$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset D_N(0)$, nun folgt

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} = e^N,$$

$\forall z \in K$, und Satz 1.30 ergibt die Behauptung.

1.7. Potenzreihen

Definition 1.31. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fix, $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Den Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

nennt man formale Potenzreihe um z_0 mit den Koeffizienten a_n.
Sind

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{und} \qquad Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

zwei formale Potenzreihen, so definiert man die Summe und das Produkt der beiden wie folgt:

$$P + Q = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n,$$

$$P \cdot Q = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ wobei } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

letzteren Ausdruck nennt man auch das Cauchy–Produkt.

Satz 1.32. *Wenn $s, M > 0$ zwei Konstanten sind mit der Eigenschaft, dass*

$$|a_n| s^n \leq M \ , \ \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ gleichmäßig und absolut auf jeder kompakten Teilmenge von $D_s(z_0) = \{z : |z - z_0| < s\}$.

Beweis. Ist K eine kompakte Teilmenge von $D_s(z_0)$, dann existiert ein $0 < r < s$ mit $K \subset D_r(z_0)$. Setze $q = r/s < 1$:

$$\sup_{z\in K} |a_n(z-z_0)^n| \leq \sup_{z\in D_r(z_0)} |a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n|r^n = |a_n|s^n \frac{r^n}{s^n} \leq Mq^n,$$

da $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n < \infty$ folgt die Behauptung aus Satz 1.30 $\square$

Bemerkung. Wenn $|a_n|s^n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, dann ist für jedes r mit $0 < r < s$ die Folge $(|a_n|r^n)_n$ eine Nullfolge.

Definition 1.33. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe und

$$R := \sup\{t \geq 0 : (|a_n|t^n)_n \text{ eine beschränkte Folge ist}\}.$$

R nennt man Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Satz 1.34. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann gilt :*
(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist gleichmäßig konvergent auf jeder kompakten Teilmenge von $D_R(z_0)$.
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ist nicht konvergent in $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(z_0)}$.

Beweis. (1) Ist $R = 0$, so ist die Aussage trivial. Bei $R > 0$ gilt für ein beliebiges $0 < s < R$: die Folge $(|a_n|s^n)_n$ ist beschränkt. Nach Satz 1.32 konvergiert daher die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_s(z_0)$, und da s beliebig war, folgt die erste Behauptung.
(2) Ist $|z-z_0| > R$, dann ist die Folge $(|a_n|\ |z-z_0|^n)_n$ unbeschränkt und die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ kann nicht konvergieren. $\square$

Satz 1.35 (Cauchy–Hadamard). [8] *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann gilt :*

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1} \qquad (1/0 = \infty \quad 1/\infty = 0).$$

Beweis. Sei $L = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}$. Wir zeigen $L = R$.
Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt : $|a_n|^{1/n} \leq 1/(L-\epsilon)$ und somit $|a_n|(L-\epsilon)^n \leq 1$, daher ist die Folge $(|a_n|(L-\epsilon)^n)_n$ beschränkt, was $L - \epsilon \leq R$ und somit $L \leq R$ bedeutet.
Sei nun zunächst $L < \infty$. Um $R \leq L$ zu zeigen, genügt es die Aussage

$$R \leq s \ , \ \forall s > L$$

zu beweisen. Sei $L < s < \infty$. Dann ist $s^{-1} < L^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, daher existiert eine unendliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$s^{-1} < |a_m|^{1/m} \ , \ \forall m \in M.$$

Daraus folgt $|a_m|s^m > 1$, $\forall m \in M$ und $(|a_n|s^n)_n$ kann keine Nullfolge sein. Somit ist $s \geq R$, denn $s < R$ würde nach der obigen Bemerkung ergeben, dass $(|a_n|s^n)_n$ ein Nullfolge ist.
Ist $L = \infty$, so folgt $L = R$ schon aus dem ersten Schritt des Beweises. $\square$

[8]Hadamard, Jacques Solomon (1865–1963)

Beispiele. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n, \quad |a_n|^{1/n} = n$ und $R = 0$.
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |a_n|^{1/n} = 1$ und $R = 1$.
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}, \quad |a_n|^{1/n} = 1/n$ und $R = \infty$.
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, hier verwendet man besser den folgenden Satz

Satz 1.36. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, und es sei $a_n \neq 0$ für fast alle n. Dann gilt :*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leq R \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *existiert, dann ist*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Beispiel. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$ und $R = \infty$.

Beweis. Sei $S = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Ist $S = 0$, so folgt sofort $S \leq R$. Ist $S > 0$, so genügt es zu zeigen, dass $s \leq R$ für jedes $0 < s < S$. Nach Definition des Limes inferior existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > s, \ \forall n \geq l.$$

Das ergibt $|a_n|s^{-1} > |a_{n+1}| \ \ \forall n \geq l$. Sei $A = |a_l|s^l$. Dann folgt aus der letzten Ungleichung

$$|a_{l+1}|s^{l+1} < |a_l|s^{-1}s^{l+1} = |a_l|s^l = A,$$

woraus man durch Iteration sofort

$$|a_{l+m}|s^{l+m} \leq A \quad , \forall m \in \mathbb{N}$$

erhält. Daher ist die Folge $(|a_n|s^n)_n$ beschränkt. Nach Definition von R gilt somit $s \leq R$.
Sei $T = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Ist $T = \infty$, so ist $R \leq T$. Ist $T < \infty$, so bleibt zu zeigen, dass $t \geq R$ für jedes $t > T$ gilt. Man erhält wieder ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < t, \ \forall n \geq l.$$

Daraus folgt $|a_{n+1}| > |a_n|t^{-1} \ \ \forall n \geq l$. Man kann l so wählen, dass $B = |a_l|t^l > 0$, dann ist

$$|a_{l+1}|t^{l+1} > |a_l|t^{-1}t^{l+1} = |a_l|t^l = B,$$

und durch Iteration $|a_{m+l}|t^{l+m} > B \ \ \forall m \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge $(|a_n|t^n)_n$ keine Nullfolge. Daher muss $t \geq R$ gelten. □

Bemerkung. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Differenziert man die einzelnen Summanden gliedweise, so hat die neue Potenzreihe wieder Konvergenzradius R und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

(Beweis siehe Seite 30)

1.8. Elementare Funktionen

DEFINITION 1.37. $\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ... komplexe Exponentialfunktion.
Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$.

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z,$$

also $(e^z)' = e^z$.

SATZ 1.38 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Es gilt $e^{z+w} = e^z e^w$.*

BEWEIS. Sei $f(z) = e^{-z}e^{z+w}$. Dann gilt

$$f'(z) = -e^{-z}e^{z+w} + e^{-z}e^{z+w} = 0 \ , \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

f ist holomorph in $\mathbb{C}$, daher ist $f' = 0$, und $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$, sowie $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Daher $f = \text{const.}$, also ist

$$e^{-z}e^{z+w} = f(0) = e^w,$$

setzt man für $w = 0$, so ergibt sich $e^{-z}e^z = e^0 = 1$. Nun folgt

$$(e^z)^{-1} = e^{-z} \text{ und } e^{z+w} = e^z e^w.$$

□

DEFINITION 1.39.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

wobei die Reihen geichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ konvergieren.

Es gelten die folgenden Formeln:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \ , \ \cos(-z) = \cos z \ , \ \sin(-z) = -\sin z,$$
$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \ , \ \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right),$$
$$(\sin z)' = \cos z \ , \ (\cos z)' = -\sin z.$$

Für $z = x + iy$ gilt nach 1.38

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$
$$\Re e^z = e^x \cos y \ , \ \Im e^z = e^x \sin y \ , \ |e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x = e^{\Re z},$$

da $|\cos y + i \sin y| = 1$. Die Formel

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

kann als Polardarstellung der Exponentialfunktion gedeutet werden, somit gilt

$$\arg e^z = \Im z.$$

Bemerkung. (a) Die Abbildung $\varphi : t \mapsto e^{it}$ ist ein Homomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, denn es gilt

$$\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2) \ , \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Abbildung $\psi : z \mapsto e^z$ ist ein Homomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$:

$$\psi(z_1 + z_2) = \psi(z_1)\psi(z_2) \ , \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

ψ ist surjektiv : sei $w \in \mathbb{C}^*$, jedes $z = x + iy$ mit $x = \log|w|$ und $y = \arg w$ ist Urbild von w, denn es gilt $e^z = e^x e^{iy} = e^{\log|w|} e^{i \arg w} = |w| e^{i \arg w}$ und der letzte Ausdruck entspricht der Polardarstellung von w.
ψ ist jedoch nicht injektiv. Ker$\psi = \{z : \psi(z) = 1\} = \{2\pi i k : k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi i \mathbb{Z}$, da aus $1 = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ für $x = 0$ und für $y = 2\pi i k \ , \ k \in \mathbb{Z}$ folgt.
Die Exponentialfunktion ist daher periodisch mit Periode $2\pi i$, d.h. $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$.
(c) Jeder Streifen $\{z \in \mathbb{C} : a \leq \Im z < a + 2\pi\} \ , \ a \in \mathbb{R}$, wird durch die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}^*$ abgebildet. Das ergibt sich aus (b).

Definition 1.40.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \ , \ z \neq (k + 1/2)\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \ , \ z \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

Es gilt :

$$\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \ , \ \cot z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1},$$
$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z} \ , \ (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Definition 1.41.

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \ , \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Es gilt :

$$\cosh z = \cos iz \ , \ \sinh z = \frac{1}{i} \sin iz \ , \ \cos z = \cosh iz \ , \ \sin z = \frac{1}{i} \sinh iz.$$

Definition 1.42. Für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ gibt es unendlich viele $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$. Jedes solche w nennt man einen Logarithmus von z.
Jeder Logarithmus hat die Gestalt

$$w = \log|z| + i\arg z.$$

Je zwei Logarithmen unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.
Sei $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \ , \ \Re z \leq 0\}$ die geschlitzte Ebene. Für jedes $z \in \mathbb{C}^-$ ist die Darstellung $z = |z| e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$ eindeutig. Wir definieren

$$\mathrm{Log} z := \log|z| + i\varphi \ , \ z \in \mathbb{C}^-$$

als den Hauptzweig des Logarithmus .

Beispiel. $\mathrm{Log} i = i\pi/2$

SATZ 1.43. *Sei $G_0 = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \Im z < \pi\}$. Dann ist exp : $G_0 \longrightarrow \mathbb{C}^-$ holomorph und bijektiv, die Umkehrabbildung ist der Hauptzweig des Logarithmus, dieser ist als Abbildung von $\mathbb{C}^-$ nach G_0 ebenfalls holomorph und bijektiv.*

BEWEIS. Für ein $z \in G_0$ ist $w = e^z = e^x e^{i\Im z}$ im Definitionsbereich des Hauptzweiges des Logarithmus, da $|w| = e^x > 0$ und $\arg w = \Im z$. Nun gilt :

$$\mathrm{Log}(\exp z) = x + i\Im z = x + iy = z.$$

Ist $w \in \mathbb{C}^-$, dann folgt

$$\exp(\mathrm{Log} w) = \exp(\log|w| + i\arg w) = |w|e^{i\arg w} = w.$$

Also sind exp und Log zueinander inverse Funktionen, daher beide bijektiv.
Da $(\exp z)' = \exp z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, folgt die Holomorphie von Log auf $\mathbb{C}^-$ aus 1.11. Es gilt

$$(\mathrm{Log}\ w)' = \frac{1}{w}\ ,\ w \in \mathbb{C}^-.$$

$\square$

BEMERKUNG. Was ist an den folgenden Rechnungen auszusetzen?

$$\log(-1) = \log(i \cdot i) = \log i + \log i = i\pi/2 + i\pi/2 = i\pi,$$

$$0 = \log 1 = \log((-1)(-1)) = \log(-1) + \log(-1) = 2\log(-1) \Rightarrow \log(-1) = 0.$$

Bei Anwendung der Funktionalgleichung des Logarithmus hat man besonders auf das Argument zu achten, man kann bei ein und derselben Rechnung in einen anderen Zweig des Logarithmus gelangen. Eine befriedigende Erklärung der hier auftretenden Phänomeme ist erst durch den Begriff der Riemann'schen Fläche möglich.

DEFINITION 1.44. Sei $z \in \mathbb{C}^-$ und $a \in \mathbb{C}$.

$$z^a := \exp(a\mathrm{Log}z).$$

Mit Hilfe der Kettenregel 1.11 zeigt man :

$$(z^a)' = az^{a-1}.$$

BEISPIELE. $1^a = 1$, $\forall a \in \mathbb{C}$, $z^{1/2}$ ...komplexe Wurzelfunktion .

$$i^i = \exp(i\mathrm{Log}i) = \exp(i.i\pi/2) = \exp(-\pi/2) = 0,208...$$

$$\sqrt{i} = i^{1/2} = \exp(1/2\mathrm{Log}i) = \exp(i\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

1.9. Übungen

1) Man bestimme den Real– und Imaginärteil, sowie den Absolutbetrag von

$$\frac{2}{1-3i}, \quad (1+i\sqrt{3})^6, \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4.$$

2) Man bestimme alle komplexen Zahlen z, für welche gilt $\overline{z} = z^2$.

3) Man zeige, für $|z| = r > 0$:

$$\Re z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^2}{z}\right), \quad \Im z = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{r^2}{z}\right).$$

4) Beweise die Identität

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

und erläutere ihre geometrische Bedeutung.

5) Man bestimme den Absolutbetrag und das Hauptargument von

$$2.718 - 3.010i, \quad \frac{3+2i}{5i-4}, \quad 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

6) Sei $z_0 = \frac{\sqrt{3}+i}{-1-i}$, berechne z_0^{123}.

7) Man berechne die achten Wurzeln von $256(\cos 80° + i\sin 80°)$.

8) Man bestimme alle reellen Zahlen x und y, welche den folgenden Gleichungen genügen:
(i) $2(x+iy) = (x+iy)^2$,
(ii) $|2-(x-iy)| = x+iy$,
(iii) $\frac{x-iy}{x+iy} = i$.

9) Man gebe eine geometrische Beschreibung der Mengen aller Punkte, die durch die folgenden Relationen bestimmt sind:
(i) $|z-2+3i| < 5$,
(ii) $\Im z \geq \Re z$,
(iii) $|z-i| + |z-1| = 2$,
(iv) $\Re z = |z-2|$.

10) Sei $|w| < 1$. Man zeige:

$$\left|\frac{z-w}{\overline{w}z-1}\right| < 1, \quad \text{für } |z| < 1,$$

und

$$\left|\frac{z-w}{\overline{w}z-1}\right| = 1, \quad \text{für } |z| = 1.$$

11) Sei $f(z) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$, wobei $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Sei f komplex differenzierbar in $z_0 \neq 0$. Man zeige: in z_0 gilt

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Dies sind die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten.

12) Sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ und f genüge den Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen in einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{C}$. Sei $\overline{G}$ jene Menge in $\mathbb{C}$, welche man durch Spiegelung von G an der reellen Achse erhält, d.h. $(x,y) \in \overline{G}$, wenn $(x,-y) \in G$. Man definiere eine Funktion g auf $\overline{G}$ durch

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in \overline{G}.$$

Man zeige, dass g die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichnungen in $\overline{G}$ erfüllt.

13) Die Funktion f erfülle die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen in der Kreisscheibe $|z| < R$. Man definiere eine Funktion g außerhalb dieser Kreisscheibe durch

$$g(z) = \overline{f(R^2/\overline{z})}, \quad |z| > R.$$

Man zeige: g erfüllt die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen auf $|z| > R$. (Verwende Polarkoordinaten!)

14) Let $a, b, c \in \mathbb{R}$. For $x, y \in \mathbb{R}$ and $z = x + iy$ set $P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Find a necessary and sufficient condition for the existence of a holomorphic function $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ such that $\Re(f) = P$.

15) Sei f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und reellwertig. Zeige : f ist konstant.

16) Sei $f(z) = |z|^4 + (\Im z)^2$. Berechne : f_z und $f_{\overline{z}}$.

17) Beweise :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}}.$$

18) Man zeige: ist f reellwertig, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}.$$

19) Man beweise die folgenden Kettenregeln:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.$$

20) Sei φ eine diffenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen t. Man zeige :

$$\frac{d(f \circ \varphi)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{d\overline{\varphi}}{dt}.$$

21) Sei

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Man zeige : f ist auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ winkeltreu. Ferner bestimme man die Bilder unter f jeder Kreislinie $|z| = r < 1$ und jedes Radiusstrahls $z = ct, 0 < t < 1, |c| = 1$ und überprüfe die Winkeltreuheit von f anhand dieser Bildkurven.

22) Es sei

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + az^n}, \quad a \neq 0.$$

Man zeige, dass die Folge (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge des offenen Einheitskreises $D_1(0)$ gleichmäßig gegen 1 konvergiert, und auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus D_r(0)$ gleichmäßig gegen 0, falls $r > 1$.

23) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $D_1(0)$ gegen $z(1-z)^{-2}$ und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \overline{D_1(0)}$ gegen $(1-z)^{-2}$ konvergiert.

24) Wo konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n},$$

wo konvergiert sie gleichmäßig ?

25) Die Konvergenzradien von

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad und \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

seien R_1 bzw. R_2. Man zeige für den Konvergenzradius R von

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

gilt $R \geq R_1 R_2$; für den Konvergenzradius R' von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n, \qquad b_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt $R' \leq R_1/R_2$; und für den Konvergenzradius R_0 von

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n$$

gilt $R_0 \geq \min(R_1, R_2)$.

26) Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+i)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{2n+2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} z^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} 2^{\log n} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} z^{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \right]^n z^n.$$

27) Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit Konvergenzradius $R > 0$. Beweise die Parseval'sche Gleichnug

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \quad 0 < r < R.$$

Ist f zusätzlich beschränkt, d.h.

$$|f(z)| \leq M, z \in D_R(0),$$

dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} \leq M^2.$$

Wenn $r < R$ und $M(r) = \sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$, dann gilt

$$|a_n| \leq r^{-n} M(r), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

28) Man bestimme Real– und Imaginärteil von $\tan z$ und $\cot z$.

29) Man berechne die Summe der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ki\theta}$$

und berechne daraus die Summenformeln für

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta \text{ und } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta.$$

KAPITEL 2

Der Cauchy'sche Integralsatz

2.1. Kurvenintegrale

Definition 2.1. Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U \subseteq \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung, wir nennen γ einen Weg in $\mathbb{C}$. Wir verwenden γ als Symbol für die Abbildung und γ^* für die Menge $\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$. $\gamma(a)$ heißt Anfangspunkt und $\gamma(b)$ Endpunkt des Weges, $[a,b]$ das Parameterintervall. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so nennt man γ einen geschlossenen Weg.
Sei $a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = b$ und $\gamma|_{[s_{j-1},s_j]}$ für $j = 1,\ldots,n$ stetig differenzierbar. Ein stückweise stetig differenzierbarer Weg γ heißt Pfad.
Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ ein Pfad in U.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &:= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \Re\left(f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)\,dt + i\int_a^b \Im\left(f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)\,dt\end{aligned}$$

ist das Kurvenintegral von f längs γ.

Bemerkung 2.2. (a) Sei $\varphi : [a_1,b_1] \longrightarrow [a,b]$ eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung mit $\varphi(a_1) = a$ und $\varphi(b_1) = b$, weiters $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ und $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi : [a_1,b_1] \longrightarrow U$ Pfade in U.
Für jedes stetige $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt dann

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt =$$

$$\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

wobei zuletzt die Substitution $s = \varphi(t)$, $ds = \varphi'(t)dt$ vorgenommen wurde.
In diesem Zusammenhang spricht man davon, dass die Kurven γ_1 und γ äquivalent sind und das Kurvenintegral unabhängig von der Parametrisierung ist.

(b) Seien $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ und $\gamma_2 : [b,c] \longrightarrow U$ Pfade in U mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Wir definieren einen neuen Pfad $\gamma : [a,c] \longrightarrow U$ durch $\gamma|_{[a,b]} = \gamma_1$ und $\gamma|_{[b,c]} = \gamma_2$ (Komposition von Pfaden). Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

(c) Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ ein Pfad. Wir definieren den zu γ inversen Pfad γ_1 durch $\gamma_1(t) := \gamma(1-t)$, $t \in [0,1]$. Dann gilt $\gamma^* = \gamma_1^*$ und

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Dies folgt durch die Substitution $1-t=s$, $dt=-ds$ im Integral

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(1-t))(-\gamma'(1-t))\,dt = \int_1^0 f(\gamma(s))(-\gamma'(s))(-1)\,ds =$$

$$-\int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Wir schreiben auch $\gamma_1 = \gamma^{-1}$.

(d) Ist $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ ein Pfad und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Die Länge $L(\gamma)$ des Pfades γ ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Weiters gilt

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le L(\gamma) \max_{z\in\gamma^*} |f(z)|,$$

wie die folgende Abschätzung zeigt :

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))|\;|\gamma'(t)|\,dt \le L(\gamma) \max_{z\in\gamma^*} |f(z)|.$$

Beispiel 2.3. (1) Sei $a \in \mathbb{C},\ r > 0$ und $\gamma(t) = a + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ der positiv orientierte Kreis mit Mittelpunkt a und Radius r (einmal durchlaufen). Ferner $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion $D_r(a) \subset U$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = ir \int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{it}dt.$$

Spezialfälle : $a = 0,\ r = 1,\ f(z) = z$:

$$\int_\gamma z\,dz = i\int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt = 0;$$

$f(z) = \overline{z}$:

$$\int_\gamma \overline{z}\,dz = i\int_0^{2\pi} e^{-it}e^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i;$$

$f(z) = 1/z$:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = i\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}}\,dt = 2\pi i.$$

$a \in \mathbb{C}$ beliebig, $r > 0$:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = ir\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{a+re^{it}-a}\,dt = ir\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{re^{it}}\,dt = 2\pi i.$$

(2) Sei $a, b \in \mathbb{C}$, $a \ne b$, $\gamma(t) = a + (b-a)t$, $t \in [0,1]$ die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten a und b, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei $\gamma^* \subset U$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)\,dt.$$

Ist $a = -1$, $b = 1$ und $f(z) = z$:

$$\int_\gamma z\,dz = 2\int_0^1 (-1+2t)\,dt = 2(-t+t^2)\Big|_0^1 = 0.$$

Ist γ_1 der positiv orientierte Halbkreis zwischen den Punkten -1 und 1 :

$$\int_{\gamma_1} z\,dz = i\int_{\pi}^{2\pi} e^{2it}\,dt = \frac{e^{2it}}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} = 0.$$

Bei der Funktion $f(z) = z$ erkennt man hier, dass das Kurvenintegral vom Weg zwischen -1 und 1 unabhängig ist. Hingegen ist für $f(z) = \overline{z}$:

$$\int_{\gamma} \overline{z}\,dz = 2\int_0^1 (-1+2t)\,dt = 0,$$

aber

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}\,dz = i\int_{\pi}^{2\pi} e^{-it}e^{it}\,dt = i\pi.$$

(3) Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $\Delta = \Delta(a, b, c)$ das Dreieck mit den Eckpunkten a, b, c, durchlaufen in der Reihenfolge : $a \to b \to c \to a$.

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz.$$

Ist $\Delta' = \Delta(a, c, b)$ das Dreieck durchlaufen in der Reihenfolge : $a \to c \to b \to a$.

$$\int_{\partial\Delta'} f(z)\,dz = \int_{[a,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,a]} f(z)\,dz =$$

$$-\int_{[c,a]} f(z)\,dz - \int_{[b,c]} f(z)\,dz - \int_{[a,b]} f(z)\,dz = -\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz.$$

2.2. Stammfunktionen

Definition 2.4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. f besitzt eine Stammfunktion auf U, wenn eine holomorphe Funktion F auf U existiert mit $F' = f$ auf U. F nennt man eine Stammfunktion von f.

Bemerkung. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend und besitzt $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei Stammfunktionen F_1 und F_2, so gilt $F_1 = F_2 + C$, wobei C eine Konstante ist. Das folgt sofort aus $F_1' - F_2' = f - f = 0$.

Satz 2.5. *Die stetige Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ besitze eine Stammfunktion F auf U. Seien $z_0, z_1 \in U$ und γ ein beliebiger Pfad in U von z_0 nach z_1. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Beweis. Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ und γ stetig differenzierbar auf $[t_{k-1}, t_k]$ für $k = 1, \ldots n$. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F \circ \gamma)'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} [F(\gamma(t_k)) - F(\gamma(t_{k-1}))] = F(z_1) - F(z_0).$$

□

Korollar 2.6. *Besitzt die stetige Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion auf U, so gilt für jeden geschlossenen Pfad γ in U*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Bemerkung. Ist $F \in \mathcal{H}(U)$ (holomorph auf U) und F' stetig (wir werden später zeigen, dass diese Bedingung überflüssig ist), dann gilt für jeden geschlossenen Pfad in U :

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = 0.$$

Beispiel 2.7. (a) Die Funktion $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ hat $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ als Stammfunktion auf $\mathbb{C}$ für $n \geq 0$ und auf $\mathbb{C}^*$ für $n < -1$. Es gilt

$$\int_{[z_0,z_1]} z^n\,dz = \frac{1}{n+1}(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}) \ , \ \int_\gamma z^n\,dz = 0,$$

für $n \neq -1$ und für jeden geschlossenen Pfad γ mit $0 \notin \gamma^*$.
Das komplexe Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ hat $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1}$ als Stammfunktion.
(b) Bei der Funktion $f(z) = \overline{z}$ hängt das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nicht nur vom Anfangs– und Endpunkt des Pfades ab (siehe Beispiel (2) in 2.3), daher besitzt f nach 2.5 auf keiner offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion.
(c) Ist $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so gilt

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

nach 2.6 hat die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^*$ keine Stammfunktion.
Für jedes $z \in \mathbb{C}^-$ existiert jedoch eine offene Umgebung U_z, auf welcher $f(z) = \frac{1}{z}$ die Funktion $\mathrm{Log} z$ als Stammfunktion besitzt.

Bemerkung. Eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt wegweise zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $a, b \in U$ eine stetige Kurve in U existiert, welche a mit b verbindet.
Es gilt : eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist genau dann wegweise zusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist.

Wir beweisen nun die Umkehrung von Korollar 2.6.

Satz 2.8. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Weiters gelte für jeden geschlossenen Pfad γ in G*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $a \in G$ fix. Für ein beliebiges $z \in G$ wählen wir einen Pfad γ_z in G von a nach z und setzen

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Wir werden zeigen $F'(z_0) = f(z_0)$ für ein beliebiges $z_0 \in G$.
Ist z hinreichend nahe bei z_0, so gilt $[z_0, z] \subset G$ und der Pfad γ, der sich aus γ_{z_0}, $[z_0, z]$ und γ_z^{-1} zusammensetzt, ist ein geschlossener Pfad in G. Nach Voraussetzung gilt daher

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\,dt = (z - z_0)A(z), \end{aligned}$$

wobei $A(z) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,dt$, $A(z_0) = f(z_0)$ ist. Daher ist

$$A(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0},$$

und um $F'(z_0) = f(z_0)$ zu zeigen, genügt es nach 1.10 die Stetigkeit von A an der Stelle z_0 zu beweisen. Dazu schätzen wir wie folgt ab

$$|A(z) - A(z_0)| \leq \max_{t\in[0,1]} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|.$$

Nun ergibt sich die Stetigkeit von A an der Stelle z_0 aus der Stetigkeit von f an der Stelle z_0. Also ist F eine Stammfunktion von f auf G.
Wir bemerken noch, dass die Definition der Funktion F nicht von der Wahl des Pfades γ_z abhängt. Ist $\tilde{\gamma_z}$ ein anderer Pfad von a nach z, so ist $\gamma_z \tilde{\gamma_z}^{-1}$ ein geschlossener Pfad in G und daher

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{\tilde{\gamma_z}} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_z \tilde{\gamma_z}^{-1}} f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

und somit

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\tilde{\gamma_z}} f(\zeta)\,d\zeta.$$

□

Setzt man mehr über die Gestalt des Gebietes G voraus, so kann man die Bedingung in Satz 2.8 abschwächen.

Definition 2.9. Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt <u>konvex</u>, wenn mit je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ auch die gesamte Verbindungsgerade $[z_0, z_1]$ in G liegt.

Satz 2.10. *Sei G ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Weiters gelte für jedes Dreieck $\Delta \subseteq G$*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $a \in G$ fix und

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta,$$

für $z \in G$ beliebig. Beachte, dass nach Voraussetzung $[a, z] \subset G$. Ist $z_0 \in G$, so liegt das Dreick Δ mit den Eckpunkten a, z, z_0 ganz in G und daher ist

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{[a,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Nun kann man den Beweis von 2.8 übernehmen. □

Bemerkung. Ist G nicht konvex, so gilt die Aussage von 2.10 zumindest in jeder konvexen Umgebung $U_z \subseteq G$ eines beliebigen Punktes $z \in G$.

2.3. Windungszahlen

Satz 2.11. *Sei γ ein Pfad in $\mathbb{C}$ und $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen auf γ^*. Falls die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig auf γ^* gegen eine Funktion f konvergiert, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Beweis. Nach 2.2 (d) gilt

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz \right| = \left| \int_\gamma (f_n(z) - f(z))\, dz \right| \leq L(\gamma) \max_{z\in\gamma^*} |f_n(z) - f(z)|,$$

daraus folgt sofort die Behauptung. □

Bemerkung. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ gleichmäßig auf γ^*, so folgt

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=0}^\infty f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^\infty \int_\gamma f_n(z)\, dz.$$

Satz 2.12. *Sei $P(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann folgt : P ist auf $D_R(z_0)$ holomorph und*

$$P'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

(Differentiation und Summation sind also vertauschbar)

Beweis. Wir zeigen zunächst die folgende Behauptung : für den Konvergenzradius R' der Potenzreihe $Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ gilt $R' \geq R$. Dabei können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass $z_0 = 0$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ hat Konvergenzradius 1, d.h. $\forall \rho \in [0,1)$ ist die Folge $(n\rho^n)_n$ beschränkt. Für ein beliebiges $z_1 \in D_R(0)$ ist $|a_n z_1^n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(M > 0)$, weiters gilt für $0 < |z_2| < |z_1|$

$$|na_n z_2^{n-1}| = \frac{n}{|z_2|}\left|\frac{z_2}{z_1}\right|^n |a_n z_1^n| \leq n\left|\frac{z_2}{z_1}\right|^n \frac{M}{|z_2|},$$

da $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| < 1$, ist die Folge $(|na_n z_2^{n-1}|)_n$ beschränkt. $|z_2| < |z_1| < R$ waren beliebig, daher gilt nach Definition des Konvergenzradiuses 1.33: $R' \geq R$.
Sei nun γ ein beliebiger geschlossener Pfad in $D_{R'}(0)$. Wir zeigen Q hat P als Stammfunktion auf $D_{R'}(0)$:

$$\int_\gamma Q(z)\,dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \int_\gamma z^{n-1}\,dz = 0,$$

dabei konnten wir nach 2.11 Integration und Summation miteinander vertauschen und haben zuletzt Beispiel 2.7(a) verwendet. Nun folgt die Existenz einer Stammfunktion von Q auf $D_{R'}(0)$ aus 2.8, eine solche ist

$$\int_{[0,z]} Q(\zeta)\,d\zeta = \int_{[0,z]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} na_n \zeta^{n-1}\right) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \int_{[0,z]} \zeta^{n-1}\,d\zeta$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei wir wieder 2.11 und Beispiel 2.7 (a) verwendet haben. Daher ist

$$P(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

ebenfalls eine Stammfunktion von Q auf $D_{R'}(0)$. Wir haben somit auch gezeigt, dass P auf $D_{R'}(0)$ konvergiert und daher $R' = R$. □

Bemerkung. Wendet man 2.12 auf P' an, so folgt, dass auch P' auf $D_R(z_0)$ holomorph ist. Durch Iteration erschließt man die Existenz der Ableitungen von P beliebiger Ordnung, sowie die Formel

$$P^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \quad , \quad a_n = \frac{P^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Bemerkung. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $p,q \in U$. Wir sagen p ist äquivalent zu q $(p \sim q)$, wenn ein Weg in U existiert, der p mit q verbindet. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation und die dazugehörigen Äquivalenzklassen heißen Zusammenhangskomponenten von U. Für $p \in U$ sei U_p die Äquivalenzklasse, in welcher p liegt. U_p ist die größte zusammenhängende Teilmenge von U, welche p enthält.

Satz 2.13 (Jordan'scher Kurvensatz). [1] *Sei γ ein geschlossener, doppelpunktfreier Weg in $\mathbb{C}$. Dann hat die Menge $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ zwei Zusammenhangskomponenten (das Innere und das Äußere von γ), genauer eine beschränkte und eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.*

(Beweis schwierig!)

Satz 2.14. *Sei γ ein geschlossener Pfad , $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Sei*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\ ,\ z \in \Omega.$$

Dann ist Ind_γ *eine ganzzahlige Funktion auf* Ω, *also* $\mathrm{Ind}_\gamma(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$, Ind_γ *ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω, auf der unbeschränkten Zusammenhangskompente von Ω ist* $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.
$\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ *heißt Windungszahl von γ in Bezug auf z.*

Bemerkung. Die Menge γ^* ist kompakt, daher existiert ein Kreis D mit $\gamma^* \subset D$. Die Menge $\mathbb{C} \setminus D$ ist zusammenhängend und liegt somit in einer Zusammenhangskomponente von Ω. Also hat Ω genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

Lemma 2.15. *Seien $\phi, \psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ Wege in $\mathbb{C}$. Sei ferner $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit $\Omega \cap \phi^* = \emptyset$. Wir definieren*

$$f(z) = \int_a^b \frac{\psi(t)}{\phi(t) - z}\, dt\ ,\ z \in \Omega.$$

Dann ist f holomorph in Ω.

Bemerkung. Wir werden später einen allgemeineren Satz über die holomorphe Abhängigkeit eines Integrals von einem komplexen Parameter beweisen (siehe 2.26).

Beweis. Sei $w \in \Omega$ beliebig. Dann existiert ein $r > 0$ mit $D_r(w) \subseteq \Omega$. Wir zeigen :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n,$$

wobei die Summe gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $D_r(w)$ konvergiert. Dann folgt aus 2.12 die Holomorphie von f auf $D_r(w)$ und da $w \in \Omega$ beliebig war, die Holomorphie auf ganz Ω.
Dazu schreiben wir für $z \in D_{r/2}(w)$ den Nenner des Integranden in der Form

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(t) - z} &= \frac{1}{\phi(t) - w}\ \frac{\phi(t) - w}{\phi(t) - w - (z - w)} = \frac{1}{\phi(t) - w}\ \frac{1}{1 - \frac{z-w}{\phi(t)-w}} \\ &= \frac{1}{\phi(t) - w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - w}{\phi(t) - w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - w)^n}{(\phi(t) - w)^{n+1}},\end{aligned}$$

[1] Jordan, Camille (1838–1921)

wobei die Summe wegen $|\phi(t)-w|>r$, $\forall t\in[a,b]$ gleichmäßig für alle $t\in[a,b]$ konvergiert (hier verwenden wir die Voraussetzung $\Omega\cap\phi^*=\emptyset$). Daher ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-w)^n}{(\phi(t)-w)^{n+1}}\right]\psi(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b \frac{(z-w)^n}{(\phi(t)-w)^{n+1}}\psi(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_a^b \frac{\psi(t)}{(\phi(t)-w)^{n+1}}\,dt\right](z-w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-w)^n, \end{aligned}$$

wobei

$$|c_n| = \left|\int_a^b \frac{\psi(t)}{(\phi(t)-w)^{n+1}}\,dt\right| \le \frac{b-a}{r^{n+1}}\max_{t\in[a,b]}|\psi(t)|.$$

Also konvergiert die Reihe

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-w)^n$$

gleichmäßig für z in einer beliebigen kompakten Teilmenge von $D_r(w)$, da dort die Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\;|(z-w)^n| \le C\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n,$$

für ein $\rho<1$ gilt. □

Beweis von Satz 2.14. Da

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\ ,\ z\in\Omega,$$

gilt $\operatorname{Ind}_\gamma(z)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\Phi(b)=1$, wobei

$$\Phi(t)=\exp\left[\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\right],$$

hierbei verwenden wir die Tatsache, dass

$$\frac{w}{2\pi i}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow e^w=1\quad(1.39).$$

Wir berechnen nun die logarithmische Ableitung von $\Phi(t)$:

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}=\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z},$$

ausgenommen in den endlich vielen Punkten $a=s_0<s_1<\cdots<s_n=b$, wo γ möglicherweise nicht differenzierbar ist, also gilt dann auch

$$\Phi'(t)(\gamma(t)-z)-\Phi(t)\gamma'(t)=0$$

und daher ist

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-z}\right)'=\frac{\Phi'(t)(\gamma(t)-z)-\Phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2}=0$$

bis auf endlich viele Punkte. Andererseits ist die Funktion

$$t\mapsto\frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-z}$$

stetig auf ganz $[a, b]$ auf Grund des Hauptsatzes der Differential– und Integralrechnung, somit ist sie konstant auf ganz $[a, b]$. Da $\Phi(a) = e^0 = 1$ ist, folgt

$$\frac{1}{\gamma(a) - z} = \frac{\Phi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{\Phi(t)}{\gamma(t) - z} \ , \ t \in [a, b]$$

und

$$\Phi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z} \ , \ t \in [a, b].$$

Da γ geschlossen ist, gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, und daher $\Phi(b) = 1$, und schließlich $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.
Nach Lemma 2.15 ist die Funktion

$$z \mapsto \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, ds$$

holomorph auf Ω. Da das Bild zusammenhängender Mengen unter stetigen Abbildungen wieder zusammenhängend ist, ist $\operatorname{Ind}_\gamma$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von Ω.
Aus der Formel

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, ds$$

folgt $|\operatorname{Ind}_\gamma(z)| < 1$, falls $|z|$ genügend groß ist. Daher ist $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von Ω. □

Bemerkung. Begründung der Bezeichnung "Windungszahl":
Sei

$$\lambda(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} \, ds.$$

Dann gilt $\lambda(b) = 2\pi i \ \operatorname{Ind}_\gamma(z)$ und daher $\Im\lambda(b) = 2\pi \ \operatorname{Ind}_\gamma(z)$. Mit den Bezeichnungen des vorigen Beweises ist

$$\exp(\lambda(t)) = \Phi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z}$$

und somit $\arg\Phi(b) = \Im\lambda(b) = 2\pi \ \operatorname{Ind}_\gamma(z)$. Wir setzen nun für $z = 0$. Es ist $\arg\Phi(a) = 0$ und

$$\arg\Phi(t) = \arg\gamma(t) - \arg\gamma(a),$$

durchläuft t das Intervall $[a, b]$ so wird also gezählt, wie oft sich γ um $z = 0$ "windet".

Satz 2.16. *Sei $\gamma(t) = re^{2\pi i t} + a \ , \ t \in [0, 1] \ , \ a \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |z - a| < r \\ 0 & \text{für} \quad |z - a| > r. \end{cases}$$

Beweis. Nach Beispiel (1) aus 2.3 ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 1,$$

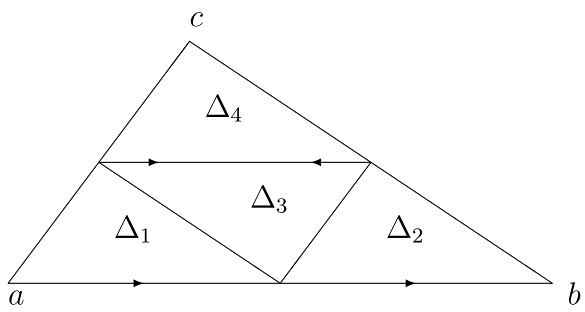
der Rest folgt aus 2.14 □

2.4. Der Satz von Cauchy–Goursat

Satz 2.17. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in \Omega$ fix, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$, sei ferner Δ ein Dreieck in Ω. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. (von A. Pringsheim)
Wir setzen zunächst voraus, dass $p \notin \Delta$.
Δ wird in 4 flächengleiche Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ zerlegt, siehe Skizze.



Dann gilt

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| = \left|\sum_{j=1}^{4}\int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz\right| \leq 4 \max_{1\leq j\leq 4}\left|\int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz\right|.$$

Die Wege im Innern des großen Dreieckes heben sich gegenseitig auf.
Jenes Dreieck, wo das obige Maximum angenommen wird, bezeichnen wir mit $\Delta^{(1)}$. Nun wiederholen wir diesen Vorgang für das Dreieck $\Delta^{(1)}$ an Stelle von Δ, dadurch erhalten wir ein Dreieck $\Delta^{(2)}$, usw.
Auf diese Art gewinnen wir eine Folge $\Delta \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$ und nach n Schritten die Ungleichung

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right|.$$

Sei $L(\partial\Delta^{(n)})$ der Umfang von $\partial\Delta^{(n)}$. Dann gilt

$$L(\partial\Delta^{(n)}) = 2^{-1}L(\partial\Delta^{(n-1)}) = \cdots = 2^{-n}L(\partial\Delta).$$

Nun zeigen wir : $\exists\ !\ z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(n)}$.
Wähle dazu eine Folge $(z_n)_n$ mit $z_n \in \Delta^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Da Δ kompakt ist, existiert ein Häufungspunkt $z_0 \in \Delta$ der Folge $(z_n)_n$, z_0 liegt aber auch in $\Delta^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, da die Folge $(z_n)_{n=m+1}^{\infty} \subset \Delta^{(m)}$. Somit gilt $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(n)}$. z_0 ist eindeutig bestimmt, da $L(\partial\Delta^{(n)}) \to 0$ bei $n \to \infty$.
Die Funktion f ist im Punkt z_0 komplex differenzierbar. Daher gilt nach 1.10

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)(f'(z_0) + B(z)),$$

wobei B in z_0 stetig ist und dort verschwindet. Die Funktion $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ hat eine Stammfunktion (formale Integration!), daher ist nach Korollar 2.6

$$\int_{\partial\Delta^{(m)}} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))\,dz = 0 \ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Nun ist

$$\left|\int_{\partial\Delta^{(m)}} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta^{(m)}} (z-z_0)B(z)\,dz\right| \le L(\partial\Delta^{(m)}) \max_{z\in\partial\Delta^{(m)}}[|z-z_0|\;|B(z)|]$$
$$\le [L(\partial\Delta^{(m)})]^2 \max_{z\in\partial\Delta^{(m)}} |B(z)|,$$

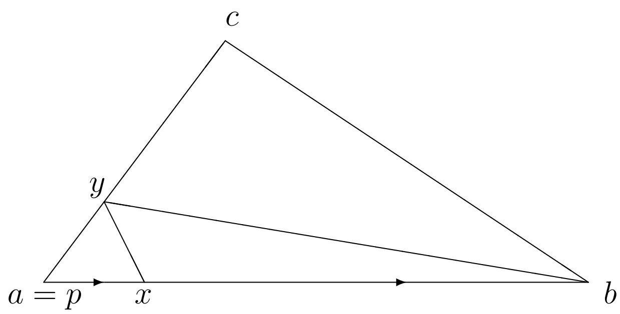
dabei haben wir in der letzten Abschätzung $|z-z_0|$, $z\in\partial\Delta^{(m)}$ durch den Umfang $L(\partial\Delta^{(m)})$ abgeschätzt.
Daraus ergibt sich nun für das ursprüngliche Integral

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4^m\;(2^{-m})^2[L(\partial\Delta)]^2 \max_{z\in\partial\Delta^{(m)}} |B(z)| = [L(\partial\Delta)]^2 \max_{z\in\partial\Delta^{(m)}} |B(z)|.$$

Da B in z_0 stetig ist und in z_0 verschwindet, strebt der Ausdruck $\max_{z\in\partial\Delta^{(m)}}|B(z)|$ bei $m\to\infty$ gegen 0, und somit ist

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Ist p ein Eckpunkt von Δ, etwa $p=a$, dann zerlegen wir Δ wie folgt in Teildreiecke :



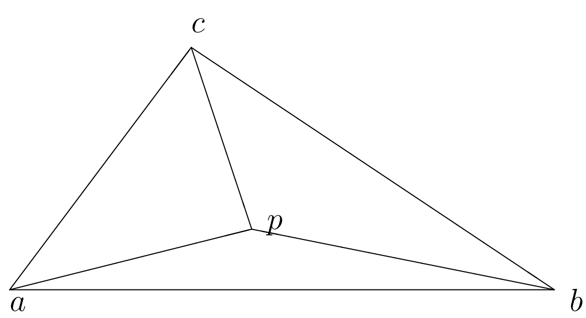
Für die Integrale erhalten wir

$$\int_{\partial\Delta} = \int_{\partial\{a,x,y\}} + \int + \dots,$$

wobei nur der erste Summand zu behandeln ist, da die weiteren Integrale den Punkt p nicht enthalten und somit nach dem ersten Schritt des Beweises alle 0 sind. Beim ersten Summanden können wir mit x und y beliebig nahe an a heranrücken, wodurch

$$\int_{\partial\{a,x,y\}} f(z)\,dz \to 0$$

wegen der Stetigkeit von f.
Liegt p schließlich innerhalb von Δ, so können wir durch die folgende Zerlegung von Δ



alles auf den zweiten Beweisschritt zurückführen.

$\square$

Korollar 2.18. *Sei Ω eine konvexe offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, $p \in \Omega$ und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Dann hat f eine Stammfunktion auf Ω und für jeden geschlossenen Pfad γ in Ω gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Nach 2.17 ist

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

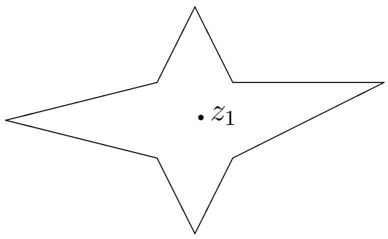
für jedes Dreieck Δ in Ω. Nun folgt aus 2.10 die Existenz einer Stammfunktion von f auf Ω und schließlich aus 2.6.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen Pfad in Ω. □

Definition 2.19. Eine offene Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt Sterngebiet , wenn ein Punkt $z_1 \in M$ (Zentrum) existiert, sodass für jedes $z \in M$ die Verbindungsstrecke von z_1 nach z ganz in M liegt.

Beispiele.
(a) Ein Sterngebiet mit Zentrum z_1.



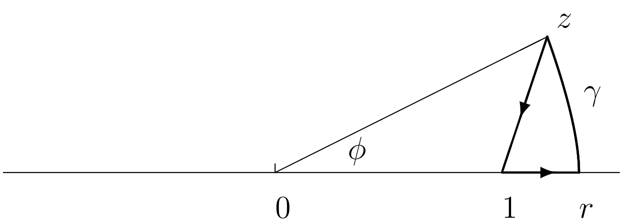
(b) $\mathbb{C}^-$: hier ist das Zentrum auf der positiven Halbachse zu wählen.

Satz 2.20. *Sei G ein Sterngebiet, c ein Zentrum, $f \in \mathcal{H}(G)$. Dann hat f eine Stammfunktion auf G und für jeden geschlossenen Pfad γ in G gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis. Der Satz 2.10 gilt auch für Sterngebiete, wie man sich leicht überlegt. Ansonsten verläuft der Beweis wie jener von 2.18 □

Beispiel. Wir betrachten $\mathbb{C}^-$ mit 1 als Zentrum, $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}^-$, sowie den unten angeführten geschlossenen Pfad γ.



Nach 2.20 ist
$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = 0.$$
Weiters können wir $\int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$ als Stammfunktion für $z \mapsto 1/z$ auf $\mathbb{C}^-$ definieren. Es gilt dann
$$\int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{dt}{t} + \int_0^\phi \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = \log r + i\phi.$$
Wir haben auf diese Art und Weise den Hauptast des Logarithmus gewonnen.

Satz 2.21 (Die Cauchy'sche Integralformel). *Sei Ω ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$, γ ein geschlossener Pfad in Ω, $z \in \Omega$, $z \notin \gamma^*$, sowie $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dann ist*
$$f(z)\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Beweis. Sei
$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & , \zeta \neq z \\ f'(z) & , \zeta = z \end{cases}$$
Dann ist g auf ganz Ω stetig und $g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z\})$, g erfüllt somit die Voraussetzungen von 2.18 $\Rightarrow$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = 0.$$
Daher gilt
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$
□

Spezialfall : Sei $\gamma(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $f \in \mathcal{H}(D_R(z))$, $R > r$. Dann gilt $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$ und
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$
Weiters erhalten wir die im folgenden sehr wichtige Abschätzung
$$|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\ 2\pi r\ \max_{\zeta\in\gamma^*}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| = \max_{\zeta\in\gamma^*}|f(\zeta)|\,.$$
Setzt man die Parameterdarstellung im obigen Kurvenintegral ein, so erhält man
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{re^{it}}\ ire^{it}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt.$$
(Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen)

Beispiel. Wir berechnen nun mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes das folgende Kurvenintegral
$$I = \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}\,dz.$$
(a) $G = D_{3/4}(0)$, $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}$, $f \in \mathcal{H}(G)$, $\gamma(t) = \frac{e^{it}}{2}$, $t \in [0, 2\pi]$: $I = 0$ nach 2.18

(b) $G = D_{11/6}(0)$, $f(z) = \frac{e^z}{z-2}$, $f \in \mathcal{H}(G)$, $\gamma(t) = \frac{3e^{it}}{2}$, $t \in [0, 2\pi]$: nach 2.21 gilt

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - 1}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^\zeta}{(\zeta-2)(\zeta-1)}\, d\zeta$$

$\Rightarrow I = -2\pi i e.$
(c) $G = D_4(0)$, $f(z) = e^z$, $f \in \mathcal{H}(G)$, $\gamma(t) = 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$: nach 2.21 gilt

$$I = \int_\gamma \frac{e^z}{z-2}\, dz - \int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-2}\, dz - \int_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\, dz = 2\pi i(e^2 - e).$$

Satz 2.22 (Taylorentwicklung). [2] *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in \Omega$, $R > 0$ derart, dass $D_R(a) \subseteq \Omega$ und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

wobei die Summe gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $D_R(a)$ konvergiert und

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

a_n nennt man die Taylorkoeffizienten von f bei Entwicklung um den Punkt a.

Beweis. Sei $\gamma(t) = a + re^{it}$, $r < R$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$, $\forall z \in D_r(a)$ (siehe 2.16). Aus 2.21 erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt \ , \ \forall z \in D_r(a).$$

Nach dem Beweis von 2.15 entwickeln wir das letzte Integral in eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - a)^{n+1}}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta$$

und die Reihe gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $D_r(a)$ konvergiert, da $r < R$ beliebig war, gilt dasgleiche auch für $D_R(a)$.
Aus 2.12 ergibt sich die Formel für die Taylorkoeffizienten . □

Im Beweis dieses Satzes sind die beiden folgenden, sehr wichtigen Aussagen enthalten:

Satz 2.23. *Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, so ist $f^{(n)} \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, f ist also beliebig oft komplex differenzierbar.*

Satz 2.24. *Voraussetzungen wie in 2.22 , $\gamma(t) = a + re^{it}$, $r < R$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann gilt*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Wir sind nunmehr in der Lage eine Umkehrung des Satzes von Cauchy–Goursat zu beweisen.

[2] Taylor, Brook (1685–1731)

Satz 2.25 (Satz von Morera). [3] *Sei G offen in $\mathbb{C}$ und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig auf G. Ferner sei*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$$

für alle Dreiecke in G. Dann ist $f \in \mathcal{H}(G)$.

Beweis. Sei $V \subseteq G$ eine beliebige konvexe Teilmenge von G. Aus 2.10 folgt die Existenz einer Stammfunktion F für f auf V, es gilt $F \in \mathcal{H}(V)$ und nach 2.23. daher auch $F' = f \in \mathcal{H}(V)$. Da V eine beliebige konvexe Teilmenge von G war, folgt $f \in \mathcal{H}(G)$. □

2.5. Wichtige Folgerungen aus dem Cauchy'schen Integralsatz

Satz 2.26. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Wir definieren*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$$

als die Nullstellenmenge von f. Dann gilt : $Z(f) = \Omega$ oder $Z(f)$ ist diskret in Ω (d.h. $Z(f)$ hat keinen Häufungspunkt in Ω).
Im zweiten Fall gilt : $\forall\ a \in Z(f)\ \ \exists\ !\ m_a \in \mathbb{N}$, mit

$$f(z) = (z - a)^{m_a} g(z),$$

wobei $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $g(a) \neq 0$.
In diesem Fall nennt man a eine Nullstelle der Ordnung m_a von f.
Weiters ist $Z(f)$ höchstens abzählbar unendlich.

Beweis. Sei A die Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$ in Ω. Da f insbesondere stetig ist, folgt $A \subseteq Z(f)$.
Sei $a \in Z(f)$ fix. Es existiert ein $r > 0$, sodass $D_r(a) \subseteq \Omega$. Nach 2.22 ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \ \forall\ z \in D_r(a).$$

Nun können wir zwei Fälle unterscheiden :
1.) alle $a_n = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ in $D_r(a)$. Daher ist dann $D_r(a) \subseteq A$, d.h. a ist ein innerer Punkt von A.
2.) $\exists$ ein kleinstes $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \neq 0$. Nun definieren wir die Funktion g durch

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & \text{für } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ a_m & \text{für } z = a. \end{cases}$$

Dann ist $f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$ und $g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Da jedoch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ in $D_r(a)$ gilt, folgt

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} (z-a)^n \quad , \forall\ z \in D_r(a).$$

Somit ist $g \in \mathcal{H}(D_r(a))$ und daher auch $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Nun ist $g(a) = a_m \neq 0$, also existiert wegen der Stetigkeit von g eine offene Umgebung U von a mit $g(z) \neq 0\ \forall z \in U \Rightarrow f(z) \neq 0\ \ \forall z \in U \setminus \{a\}$. Wir haben somit gezeigt, dass a ein isolierter Punkt in $Z(f)$ ist, d.h. $\exists$ eine Umgebung U von a, die keinen anderen Punkt von $Z(f)$ enthält.

[3] Morera, Giacinto (1856–1909)

Zusammenfassend können wir nun feststellen : ist $a \in A$, so müssen alle $a_n = 0$, denn sonst wäre nach 2.) der Punkt a isoliert; nach 1.) ist daher $D_r(a) \subseteq A$ und A ist somit offen. A ist jedoch nach Definition, als Menge der Häufungspunkte von $Z(f)$, abgeschlossen in Ω, also ist die Menge $B = \Omega \setminus A$ offen und $\Omega = A \cup B$ als Vereinigung zweier offener, disjunkter Mengen darstellbar.
Da wir Ω als zusammenhängend vorausgesetzt haben, folgt $\Omega = A$ oder $A = \emptyset$. $A = \Omega$ bedeutet $f \equiv 0$ auf Ω; $A = \emptyset$ bedeutet : $Z(f)$ ist diskret in Ω. In diesem Fall liegen in jeder kompakten Teilmenge von Ω höchstens endlich viele Punkte von $Z(f)$, denn sonst wäre ja ein Häufungspunkt von $Z(f)$ in dieser kompakten Teilmenge von Ω. Wir können Ω als abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen von Ω darstellen :

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n(0) \cap \Omega_{1/n})^-,$$

wobei

$$\Omega_{1/n} = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > 1/n\},$$

damit kann $Z(f)$ höchstens abzählbar unendlich sein. □

Als Folgerung erhalten wir

SATZ 2.27 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $f = g$ auf einer Teilmenge M von Ω, die einen Häufungspunkt in Ω besitzt. Dann gilt $f = g$ auf ganz Ω.*

BEWEIS. Sei $\phi = f - g$, dann ist $\phi(z) = 0 \quad \forall z \in M$. Nach 2.26 ist $\phi(z) = 0$ auf ganz Ω. □

BEMERKUNG. Ist $f = g$ auf einer nichtleeren, offenen Teilmenge von Ω, so ist $f = g$ auf ganz Ω.
Der obige Satz ist falsch, wenn Ω nicht zusammenhängend ist. Sei $\Omega = D_1(0) \cup D_1(3)$ und

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in D_1(0) \\ 0, & z \in D_1(3). \end{cases}$$

Dann ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f = 0$ auf der offenen Teilmenge $D_1(3)$ von Ω, f ist aber nicht identisch Null auf Ω.

KOROLLAR 2.28. *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(G)$, $a \in G$ und $f^{(n)}(a) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dann ist $f = 0$ auf G.*

BEWEIS. Sei $r > 0$ derart, dass $D_r(a) \subseteq G$. Dann besitzt f nach 2.22 die Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

für $z \in D_r(a)$ und da $f^{(n)}(a) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ist $f = 0$ auf $D_r(a)$. Nach 2.27 ist dann $f = 0$ auf ganz G. □

Bemerkung. Der obige Satz ist falsch für $\mathcal{C}^\infty$– Funktionen auf $\mathbb{R}$. Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \ , & x \in \mathbb{R} \ , \ x \neq 0 \\ 0 \ , & x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f beliebig oft reell differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0 \ , \ n = 0, 1, 2, \ldots$, aber f ist nicht identisch Null auf $\mathbb{R}$.

Definition 2.29. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(U)$. f besitzt einen holomorphen Logarithmus auf U, wenn ein $g \in \mathcal{H}(U)$ existiert mit $f = \exp(g)$ auf U.
f besitzt eine holomorphe m–te Wurzel auf U, wenn ein $q \in \mathcal{H}(U)$ existiert mit $q^m = f$ auf U.

Bemerkung. Ist $\exp(g) = f$, dann ist $f \neq 0$ auf U. Weiters gilt $f' = g' \exp(g) = g'f$, also ist $g' = f'/f$, diesen Ausdruck nennt man die logarithmische Ableitung von f.

Satz 2.30. *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f \neq 0$ auf G. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent :*
(1) f besitzt einen holomorphen Logarithmus auf G;
(2) f'/f besitzt eine Stammfunktion auf G.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) : nach der vorigen Bemerkung gilt $g' = f'/f$, also besitzt f'/f eine Stammfunktion auf G.
(2) $\Rightarrow$(1) : sei $F \in \mathcal{H}(G)$ eine Stammfunktion von f'/f auf G. Setze $h = f \exp(-F)$, dann ist

$$h' = f' \exp(-F) - fF' \exp(-F) = f' \exp(-F) - \frac{ff'}{f} \exp(-F) = 0.$$

Da $h \in \mathcal{H}(G)$ und $h' = 0$ auf G, folgt h ist konstant auf G, d.h. $f = a \exp(F)$ für ein $a \in \mathbb{C} \ , \ a \neq 0$. Nun existiert ein $b \in \mathbb{C}$ mit $e^b = a$. Setze $\phi = F + b$, dann ist $\phi \in \mathcal{H}(G)$ und

$$\exp(\phi) = \exp(F + b) = a \exp(F) = f.$$

$\square$

Satz 2.31. *Sei G ein Sterngebiet, $f \in \mathcal{H}(G)$, $f \neq 0$ auf G. Dann besitzt f einen holomorphen Logarithmus und eine holomorphe m–te Wurzel auf G.*

Beweis. Nach 2.30 genügt es zu zeigen, dass f'/f eine Stammfunktion auf G besitzt. Wir verwenden Satz 2.20 : ist c ein Zentrum für G, so ist

$$g(z) = \int_{[c,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta + b \ , \ f(c) = e^b$$

die gesuchte Stammfunktion von f'/f auf G. Es gilt dann $\exp(g) = f$.
$q = \exp(g/m)$ ist die gesuchte holomorphe m-te Wurzel. $\square$

2.6. Singularitäten

DEFINITION 2.32. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in \Omega$, sowie $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. In diesem Fall nennt man a eine isolierte Singularität von f.
Kann man f im Punkt a so definieren, dass $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, so nennt man a eine hebbare Singularität von f.

SATZ 2.33. *Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ und auf der punktierten Kreisscheibe $D'_r(a) = \{z : 0 < |z-a| < r\}$ beschränkt, d.h. $\exists\ M > 0$ mit $|f(z)| \leq M$, $\forall\ z \in D'_r(a)$. Dann hat f in a eine hebbare Singularität.*

BEWEIS. Sei

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & z \in \Omega \setminus \{a\} \\ 0, & z = a. \end{cases}$$

Wir behaupten $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dazu berechnen wir

$$h'(a) = \lim_{z \to a} \frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)^2 f(z)}{z - a} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0,$$

da f in $D'_r(a)$ beschränkt ist. Nach 2.22 können wir h in $D_r(a)$ in eine Taylorreihe entwickeln

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad z \in D_r(a).$$

Setze nun $f(a) = a_2$, dann ist wegen $h(z) = (z-a)^2 f(z)$ in $D_r(a)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z-a)^n$$

in $D_r(a)$ konvergent und daher $f \in \mathcal{H}(D_r(a))$, also $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. □

SATZ 2.34. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in \Omega$, sowie $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Dann sind drei Fälle möglich:*

(a) f hat eine hebbare Singularität in a;

(b) $\exists\ c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $c_m \neq 0$, sodass

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

eine hebbare Singularität in a hat.
In diesem Fall nennt man a einen Pol m–ter Ordnung von f,
$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ heißt Hauptteil von f;

(c) $\forall\ r > 0$ mit $D_r(a) \subseteq \Omega$ ist die Menge $f(D'_r(a))$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\forall\ w \in \mathbb{C}$ und $\forall\ \epsilon > 0$ $\exists\ z \in D'_r(a)$ mit $|f(z) - w| < \epsilon$; äquivalent dazu ist : $\forall\ w \in \mathbb{C}$ $\exists$ eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, sodass $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$;
in diesem Fall heißt a eine wesentliche Singularität von f.

BEMERKUNG. Die Aussage von (c) ist Inhalt des Satzes von Casorati–Weierstraß[4] .

[4] Casorati, Felice (1835–1890)

Beweis. Wir zeigen die Fälle (a) oder (b) treffen dann zu, falls (c) nicht stimmt. Angenommen (c) ist falsch : dann $\exists\, r > 0$, $\exists\, \delta > 0$ und $\exists\, w \in \mathbb{C}$ mit

$$|f(z) - w| > \delta \ , \ \forall\, z \in D'_r(a).$$

Definiere

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad , \ z \in D'_r(a),$$

dann ist $g \in \mathcal{H}(D'_r(a))$ und

$$|g(z)| < \frac{1}{\delta} \quad , \quad \forall\, z \in D'_r(a),$$

g ist also beschränkt auf $D'_r(a)$, somit hat g nach 2.33 eine hebbare Singularität in a. Nun können wir zwei Fälle unterscheiden :

1.) $g(a) \neq 0$: dann $\exists\, 0 < s < r$ und $\exists\, \rho > 0$ mit $|g(z)| \geq \rho \ , \forall z \in D_s(a)$. Daher ist

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{g(z)} + w \right| \leq \frac{1}{\rho} + |w| \ , \ \forall\, z \in D'_s(a),$$

f ist also beschränkt auf $D'_s(a)$ und hat daher nach 2.33 eine hebbare Singularität in a.

2.) g hat in a eine Nullstelle der Ordnung m , $m \in \mathbb{N}$ (vgl.2.26),d.h.

$$g(z) = (z - a)^m g_1(z) \quad , \quad \forall z \in D_r(a),$$

wobei $g_1 \in \mathcal{H}(D_r(a))$ und $g_1(a) \neq 0$. Da

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} = (z - a)^m g_1(z)$$

auf $D'_r(a)$ gilt, ist sogar $g_1(z) \neq 0 \ \ \forall\, z \in D_r(a)$. Nun setze $h = 1/g_1$, dann ist $h \in \mathcal{H}(D_r(a))$ und auf $D'_r(a)$ gilt

$$f(z) - w = (z - a)^{-m} h(z).$$

Jetzt entwickeln wir h auf $D_r(a)$ in eine Taylorreihe

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n,$$

es gilt $b_0 = h(a) \neq 0$. Setze $c_k = b_{m-k}$, $k = 1, \ldots, m$. Dann folgt $c_m = b_0 \neq 0$ und

$$\begin{aligned} f(z) - w &= (z - a)^{-m} \ (c_m + c_{m-1}(z - a) + \cdots + c_1(z - a)^{m-1} + b_m(z - a)^m + \ldots) \\ &= \frac{c_m}{(z - a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z - a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_1}{z - a} + b_m + b_{m+1}(z - a) + \ldots . \end{aligned}$$

Somit ist

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z - a)^k} = w + b_m + b_{m+1}(z - a) + \ldots,$$

wobei die rechte Seite eine in z auf $D_r(a)$ holomorphe Funktion darstellt. □

Beispiel 2.35. (a) Sei $f(z) = \sin z/z \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\Rightarrow f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, da $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = (\sin z)'|_{z=0}$ folgt aus 2.26 $\exists\, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $\sin z = z g(z)$, also hat f in $z = 0$ eine hebbare Singularität und $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, da $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \ldots$, ist $f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \ldots$.

(b) $f(z) = \frac{1}{\sin z} \Rightarrow f \in \mathcal{H}(D_1'(0))$. Da $\sin z = zg(z)$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $g(0) \neq 0$, existiert ein $r > 0$ mit $g(z) \neq 0 \; \forall \; z \in D_r(0)$ und für $h(z) = 1/g(z)$ gilt $h \in \mathcal{H}(D_r(0))$. Somit ist

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} = \frac{h(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right),$$

wobei wir h in eine Taylorreihe entwickelt haben, die auf $D_r(0)$ konvergiert und $h(0) = b_0 \neq 0$. Daher gilt

$$f(z) - \frac{b_0}{z} = b_1 + b_2 z + \dots,$$

wobei die rechte Seite eine auf $D_r(0)$ holomorphe Funktion darstellt. Also besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ an der Stelle 0 einen Pol der Ordnung 1.

(c) $f(z) = \exp(1/z) \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$: $f(1/n) \to \infty$ bei $n \to \infty$. Aber $|f(i/n)| = 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist daher (a) und (b) aus 2.34 nicht erfüllt. Somit hat f an der Stelle 0 eine wesentliche Singularität.

(d) Analog zeigt man, dass $f(z) = \exp(-1/z^2)$ an der Stelle 0 eine wesentliche Singularität hat. Es gilt jedoch : $f|_{\mathbb{R}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2.7. Das Maximumprinzip und die Cauchy'schen Abschätzungen

SATZ 2.36. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ holomorph in $D_R(a)$. Dann gilt für $0 < r < R$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \, d\theta.$$

BEWEIS. Wir setzen $z - a = re^{i\theta}$, dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 \, d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} r^n e^{-in\theta}\right) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.\end{aligned}$$

□

DEFINITION 2.37. Ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, so nennt man f eine <u>ganze Funktion</u>.

SATZ 2.38 (Satz von Liouville). [5] *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

BEWEIS. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ganz und beschränkt, d.h. $\exists \; M > 0$ mit $|f(z)| \leq M$, $\forall \; z \in \mathbb{C}$. Dann folgt nach 2.36

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq M^2 \quad , \quad \forall \; r > 0,$$

somit muss $c_n = 0 \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}$. □

[5] Liouville, Joseph (1809–1882)

Satz 2.39 (Maximiumprinzip). *Sei* Ω *ein Gebiet in* $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$, $r > 0$, $D_r(a) \subset\subset \Omega$, *d.h.* $\overline{D_r(a)} \subset \Omega$. *Dann gilt*

$$|f(a)| \leq \max\{|f(a + re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f *auf* Ω *konstant ist.*

Bemerkung. Die obige Aussage bedeutet, dass die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ kein lokales Maximum auf Ω hat.

Beweis. Angenommen

$$\max\{|f(a + re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \leq |f(a)|,$$

dann folgt für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ nach 2.36

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 \, d\theta \leq |f(a)|^2 = |c_0|^2,$$

was $c_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ impliziert. Es gilt dann also $f = f(a)$ auf $D_r(a)$ und da Ω zusammenhängend ist, ergibt 2.27: $f = f(a)$ auf ganz Ω. □

Korollar 2.40. *Sei* Ω *ein beschränktes Gebiet in* $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *nicht konstant und auf* $\overline{\Omega}$ *stetig. Dann nimmt die Funktion* $|f|$ *ihr Maximum auf* $\partial\Omega$ *an.*

Beweis. Angenommen $\exists\ z_0 \in \Omega$ mit $\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = |f(z_0)|$, dann $\exists\ r > 0$ mit $D_r(z_0) \subset\subset \Omega$ und nach 2.39 folgt dann, da f nicht konstant ist,

$$|f(z_0)| < \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

im Widerspruch zur Annahme. □

Satz 2.41 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *ein Polynom vom Grad* n *mit den komplexen Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. *Dann besitzt* p *genau* n *Nullstellen (m-fache Nullstellen werden m Mal gezählt).*

Beweis. Wir zeigen zunächst die folgende Behauptung :

$$|p(0)| = |a_0| < |p(re^{i\theta})|$$

für jedes $\theta \in [0, 2\pi]$ und für jedes $r > 1 + 2|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$.
Diese Aussage bedeutet insbesondere, dass alle Nullstellen von p im Kreis $\overline{D_R(0)}$ mit $R = 1 + 2|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$ liegen.
Beweis der Behauptung : ist $r > R$, so ist auch $r > 1$ und daher

$$\begin{aligned} 2|a_0| + |a_1|r + \cdots + |a_{n-1}|r^{n-1} &\leq r^{n-1}(2|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) \\ &< r^{n-1}r = r^n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Weiters ist

$$\begin{aligned} r^n - |p(re^{i\theta})| &\leq |\, |r^n e^{in\theta}| - |p(re^{i\theta})|\, | \leq |r^n e^{in\theta} - p(re^{i\theta})| \\ &= |r^n e^{in\theta} - r^n e^{in\theta} - a_{n-1}r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} - \cdots - a_0| \leq |a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_1|r + |a_0|, \end{aligned}$$

also

$$r^n - (|a_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |a_0|) \leq |p(re^{i\theta})|. \tag{2.2}$$

Nun ergeben (2.1) und (2.2) die obige Behauptung :

$$\begin{aligned}|a_0| &= 2|a_0| + |a_1|r + \cdots + |a_{n-1}|r^{n-1} - (|a_0| + |a_1|r + \cdots + |a_{n-1}|r^{n-1}) \\ &< r^n - (|a_0| + |a_1|r + \cdots + |a_{n-1}|r^{n-1}) \leq |p(re^{i\theta})|.\end{aligned}$$

Der Beweis des Satzes wird nun indirekt geführt: angenommen p hat keine Nullstelle, dann ist $f = 1/p$ eine ganze, nichtkonstante Funktion mit

$$|f(re^{i\theta})| < |f(0)|$$

für alle genügend großen r, was ein Widerspruch zu 2.39 ist. Also existiert ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_1) = 0$ und daher gilt nach 2.26

$$p(z) = (z - z_1)^m \; q(z)$$

für ein $m \in \mathbb{N}$ und ein Polynom q mit $\mathrm{grad}(q) < \mathrm{grad}(p)$. (Entwickle dazu p in eine Taylorreihe um den Punkt z_1.)

Vollständige Induktion nach dem Grad des Polynoms beendet den Beweis. □

Satz 2.42 (Cauchy'schen Abschätzungen). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $r > 0$, $D_r(a) \subset\subset \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \; M_{r,a}(f),$$

wobei $M_{r,a}(f) = \max_{z \in \partial D_r(a)} |f(z)|$.

Beweis. Nach 2.24 ist

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta$$

und daher

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \; 2\pi r \; \frac{M_{r,a}(f)}{r^{n+1}}.$$

□

Satz 2.43 (Weierstraß'scher Konvergenzsatz). *Sei Ω eine offene Teilmenge in $\mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Ω gegen eine Funktion f. Dann ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und für $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $f_n^{(k)}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge gegen $f^{(k)}$.*

Ist $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ eine Cauchyfolge im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω, d.h. für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ und $\forall \, \epsilon > 0 \;\; \exists \, N_{\epsilon,K} > 0$ mit

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \quad , \; \forall \; n, m > N_{\epsilon,K},$$

dann existiert ein $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω. Man sagt auch : der Raum $\mathcal{H}(\Omega)$ ist vollständig im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω.

Beweis. f ist als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen wieder stetig. Sei Δ ein Dreieck in Ω. Δ ist kompakt. Nach Satz 2.17 gilt

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0,$$

und daher

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Nun folgt aus 2.25. , dass $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Ist K eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω, dann ist $s = \operatorname{dist}(K, \Omega^c) > 0$ und für $r = s/3$ gilt

$$K \subset \bigcup_{z\in K} D_r(z) = U.$$

Nach Konstruktion ist $\overline{U}$ eine kompakte Teilmenge von Ω und wir erhalten aus 2.42

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{w\in U} |f_n(w) - f(w)| \quad , \quad \forall\ z \in K,$$

also konvergiert f_n' gleichmäßig auf K gegen f'.
Ist $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ eine Cauchyfolge, so existiert eine Limesfunktion f, die zumindest stetig auf Ω ist (siehe reelle Analysis). Nach dem ersten Teil des Satzes ist dann aber $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\square$

Bemerkung. Es gibt Folgen von $\mathcal{C}^\infty$–Funktionen auf $\mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen nirgends differenzierbare Funktionen konvergieren.

Bemerkung 2.44. Der Raum $\mathcal{H}(\Omega)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω, ist ein vollständiger topologischer Vektorraum (2.43). Die Topologie auf $\mathcal{H}(\Omega)$ kann durch eine Metrik beschrieben werden.
Dazu betrachtet man eine kompakte Ausschöpfung der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Darunter versteht man eine Folge $(K_j)_j$ kompakter Teilmengen von Ω mit $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = \Omega$.
Man erhält eine kompakte Ausschöpfung etwa durch

$$K_j = \{z : \operatorname{dist}(z, \Omega^c) \geq 1/j\} \cap \overline{D_j(0)} \quad , \quad j \in \mathbb{N}$$

(siehe Übungen).
Nun definiert man eine Folge von Seminormen

$$\|f\|_j = \sup_{z\in K_j} |f(z)| \ , \ f \in \mathcal{H}(\Omega) \ , \ j \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $\|f\|_j \leq \|f\|_{j+1}$. Jetzt kann man eine Metrik auf $\mathcal{H}(\Omega)$ definieren :

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\ \frac{\|f-g\|_j}{1 + \|f-g\|_j} \ , \ f,g \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Die Metrik d erzeugt auf $\mathcal{H}(\Omega)$ die ursprüngliche Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω (siehe Übungen).
$\mathcal{H}(\Omega)$ ist ein Fréchetraum.

2.8. Übungen

30) Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}\, dz, \quad \int_{\gamma_2} \overline{z}\, dz, \quad \int_{\gamma_3} z\, dz,$$
$$\int_{\gamma_4} \frac{dz}{z}, \quad \int_{\gamma_5} \overline{z}\, dz,$$

wobei γ_1 der Streckenzug von $(1,0)$ über $(0,0)$ nach $(0,1)$ ist, γ_2 der Streckenzug von $(0,0)$ nach $(1,1)$ ist, γ_3 das einmal in positiver Richtung durchlaufene Quadrat mit den Ecken $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ beschreibt, γ_4 den einmal in positiver Richtung durchlaufenen Einheitskreis $|z| = 1$ und γ_5 den einmal in positiver Richtung durchlaufenen Viertelkreis mit den Eckpunkten $(0,0),(2,0),(0,2)$ beschreibt.

31) Sei $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$. Man berechne die folgenden Kurvenintegrale und vergleiche die Resultate mit den Aussagen des Cauchy'schen Integralsatzes :

$$\int_\gamma (\overline{z})^2\, dz, \quad \int_\gamma z^{-2}\, dz,$$

wobei das dazugehörige Gebiet der Kreisring $A = \{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ ist.

32) Sei $\gamma(t) = re^{it},\ r > 0,\ 0 \le t \le 2\pi$, ferner seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < r < |b|$. Man zeige :

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

33) Seien γ, a, b wie in Aufgabe 32), $m, n \in \mathbb{N}$. Man berechne :

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^m (z-b)^n}.$$

34) Sei $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$. Berechne :

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\, dz, \quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z^3}\, dz.$$

35) Sei γ wie in Aufgabe 34), $n \in \mathbb{N}$. Berechne :

$$\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz, \quad \int_\gamma \frac{dz}{(z-1/2)^n}.$$

36) Sei $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi,\ n \in \mathbb{N}_0$. Man berechne :

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}(z)}{z^n}\, dz.$$

37) Sei $\gamma(t) = -1 + e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$. Berechne :

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}.$$

38) Sei $\gamma(t) = 2e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$. Berechne :

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z+i}\, dz.$$

39) Sei $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Berechne :

$$\int_\gamma \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)}\,dz.$$

40) Man berechne

$$\int_\gamma \frac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,dz,$$

wobei $\gamma(t) = re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$, für r mit $0 < r < 2$ und $2 < r < \infty$.

41) Beweise :

$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)\,d\theta = 2\pi.$$

Hinweis : man verwende die Mittelwerteigenschaft für die Funktion $f(z) = \cos z$.

42)(a) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und L eine Gerade, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und auf $U \setminus L$ holomorph. Man zeige mit Hilfe des Satzes von Morera, dass f auf ganz U holomorph ist.
(b) Es sei G ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet (d.h. mit $z \in G$ ist $\overline{z} \in G$). Es sei

$$f : \{z \in G : \Im z \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

stetig, auf $\{z \in G : \Im z > 0\}$ holomorph, auf $\{z \in G : \Im z = 0\}$ reellwertig. Man zeige, dass durch

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{für } \Im z \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{für } \Im z < 0 \end{cases}$$

eine auf ganz G holomorphe Funktion definiert wird (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip).

43) Man prüfe, ob die folgenden Funktionen in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar sind :

$$z\cot z, \quad \frac{z}{e^z-1}, \quad z^2\sin\frac{1}{z}.$$

44) Ist f holomorph in $\{z : |z| > R\}$ und hat $f(\frac{1}{z})$ in 0 eine isolierte Singularität, so sagt man, f hat eine isolierte Singularität in ∞.
Man bestimme die Art der isolierten Singularitäten (möglicherweise auch in ∞) der folgenden Funktionen :

$$\frac{1}{z-z^3}, \quad \frac{z^5}{(1-z)^2}, \quad \frac{e^z}{1+z^2}, \quad \frac{1-e^z}{1+e^z},$$

$$\exp\left(\frac{z}{1-z}\right), \quad (e^z-1)^{-1}\exp\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad \exp\left(\tan\frac{1}{z}\right), \quad \sin\left(\cos\frac{1}{z}\right)^{-1}.$$

45) Let $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ and $f \in \mathcal{H}(D'_R(a))$ and suppose that a is an essential singularity of f. Let g be a nonconstant entire function.
(i) Show that the closure of $g(\mathbb{C})$ equals to $\mathbb{C}$.
(ii) Prove that a is an essential singularity of $g \circ f$.

46) Entwickle die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um z_0 :

$$e^z,\ z_0 = \pi i; \quad \frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2},\ z_0 = 0; \quad \frac{1}{(z-i)^3},\ z_0 = -i$$

und bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihen.

47) Let $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ and $f \in \mathcal{H}(D'_R(a))$ such that $\Re f(z) \geq 0$ for each $z \in D'_R(a)$. (i) Show that a is not an essential singularity of f.

(ii) Prove that f can in fact be extended to a holomorphic function on $D_R(a)$.

48) Wie Aufgabe 46) für :

$$(\cosh z)^2,\ z_0=0;\quad \frac{1}{az+b}, b\neq 0,\ z_0=0;\quad \int_{[0,z]} e^{\zeta^2}\,d\zeta,\ z_0=0;\quad \int_{[0,z]} \frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta,\ z_0=0.$$

49) Sei $f(z)=z/(e^z-1)$. Man entwickle f in eine Potenzreihe um $z_0=0$, setze ferner

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}z^k.$$

Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe und zeige, dass

$$0=a_0+\binom{n+1}{1}a_1+\cdots+\binom{n+1}{n}a_n.$$

Verwende die Tatsache, dass $f(z)+\frac{1}{2}z$ eine gerade Funktion ist, um zu zeigen, dass $a_k=0$, für k ungerade und $k>1$.

50) Sei $a_n, n\in\mathbb{N}_0$ wie in Aufgabe 49). Die Zahlen $B_{2n}=(-1)^{n-1}a_{2n}, n\geq 1$, werden die Bernoulli Zahlen genannt. Man berechne $B_2, B_4,\ldots,B_{10}$.

51) Let $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ be a function in $\mathcal{H}(D_1(0))$ such that

$$|f(z)|(1-|z|)\leq 1,\quad z\in D_1(0).$$

Prove that for $n\in\mathbb{N}$:

$$|a_n|\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)<e(n+1).$$

52) Sei f eine ganze Funktion und

$$|f(z)|\leq A+B|z|^k,$$

für $z\in\mathbb{C}$, wobei A,B,k positive Konstanten sind. Man beweise : f ist ein Polynom .

53) Eine ganze Funktion heißt transzendent, wenn sie in ∞ eine wesentliche Singularität besitzt. Sei f eine ganze transzendente Funktion, sei $M(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$. Man beweise :

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{\log r}=\infty.$$

54) Let $a\in\mathbb{C}$, $R>0$ and $f\in\mathcal{H}(D_R'(a))$. Suppose that a is a pole of f. Let g be a transcendental entire function. Show that a is an essential singularity of $g\circ f$.

55) Sei $f\in\mathcal{H}(D_R(0))$ und nichtkonstant. Man zeige, die Funktion $r\mapsto M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$ ist strikt monoton wachsend für $r\in(0,R)$.

56) Let f be an entire function, α a zero of f and $z\in\mathbb{C}$. Show that:

$$|f(z)|\leq 2|z-\alpha|\sup\{|f(w)|:\ |z-w|=1\}.$$

57) Sei f holomorph auf $D_{r_1,r_2}(0)=\{z: r_1<|z|<r_2\}$, stetig auf $\overline{D_{r_1,r_2}(0)}$ und sei $M_k=\sup_{|z|=r_k}|f(z)|, k=1,2$. Man zeige, für $M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$ gilt

$$\log M(r)\leq\frac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M_1+\frac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M_2.$$

(Hadamard'sche Dreikreisesatz)
Man sagt, $\log M(r)$ ist eine konvexe Funktion von $\log r$.

Hinweis: betrachte die Funktion $[f(z)]^p z^{-q}$, wobei p, q geeignete ganze Zahlen sind und verwende das Maximumprinzip.

58) Der Raum $\mathcal{H}(\Omega)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω, ist ein vollständiger topologischer Vektorraum (2.43). Die Topologie auf $\mathcal{H}(\Omega)$ kann durch eine Metrik beschrieben werden.
Dazu betrachtet man eine kompakte Ausschöpfung der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Darunter versteht man eine Folge $(K_j)_j$ kompakter Teilmengen von Ω mit $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$.
Man erhält eine kompakte Ausschöpfung etwa durch

$$K_j = \{z : \operatorname{dist}(z, \Omega^c) \geq 1/j\} \cap \overline{D_j(0)} \quad , \quad j \in \mathbb{N}.$$

Beweis!

59) Definiere eine Folge von Seminormen

$$\|f\|_j = \sup_{z \in K_j} |f(z)| \ , \ f \in \mathcal{H}(\Omega) \ , \ j \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $\|f\|_j \leq \|f\|_{j+1}$.
Sei

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \ \frac{\|f-g\|_j}{1 + \|f-g\|_j} \ , \ f, g \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Man zeige d ist eine Metrik auf $\mathcal{H}(\Omega)$.
Weiters beweise man : die Metrik d erzeugt auf $\mathcal{H}(\Omega)$ die ursprüngliche Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω.

60) Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(G)$, sei ferner $z \in G$ und $R > 0$ derart, dass $D_R(z) \subseteq G$. Zeige :

$$f(z) = \frac{1}{R^2 \pi} \int_{D_R(z)} f(\zeta)\, d\lambda(\zeta),$$

wobei $d\lambda$ das Lebesgue Maß (Flächenmaß) auf $\mathbb{C}$ ist. Hinweis: man verwende die Cauchy'sche Integralformel und benütze Polarkoordinaten.

61) Sei $D = \{z : |z| < 1\}$ und

$$\mathcal{H}^2(D) = \{f \in \mathcal{H}(D) : \|f\|_2^2 = \int_D |f(z)|^2 \, d\lambda(z) < \infty\},$$

Man setze

$$(f,g) = \int_D f(z)\overline{g(z)} \, d\lambda(z) \ , f, g \in \mathcal{H}^2(D).$$

Man beweise, $\mathcal{H}^2(D)$, versehen mit der Norm $\|.\|_2$, ist ein Hilbertraum[6], d.h. ein vollständiger Vektorraum mit innerem Produkt. $\mathcal{H}^2(D)$ heißt Bergman–Raum für D. Hinweis: zum Beweis der Vollständigkeit zeige man zunächst, dass für jede kompakte Teilmenge K von G gilt

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C_K \|f\|_2,$$

für jedes $f \in \mathcal{H}^2(D)$, wobei $C_K > 0$ eine Konstante ist, welche nur von K abhängt. Dafür verwende man die vorige Aufgabe.
Anschließend benütze man den Weierstraß 'schen Konvergenzsatz.

[6]Hilbert, David (1862–1943)

2.9. Offene Abbildungen

DEFINITION 2.45. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. ϕ heißt offene Abbildung, wenn $\phi(V)$ offen ist, für jedes offene $V \subseteq U$.

BEMERKUNG. $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig $\Leftrightarrow$ $\phi^{-1}(O)$ offen, für jedes offene $O \subseteq \mathbb{C}$.

BEISPIEL. Sei $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = x^2$. Es gilt $\phi((-1,1)) = [0,1)$. Daher ist ϕ nicht offen.

SATZ 2.46 (Minimumprinzip). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(U)$, ferner sei $c \in U$ und V eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und $\overline{V} \subset U$, weiters gelte*

$$\min_{z \in \partial V} |f(z)| > |f(c)|.$$

Dann hat f eine Nullstelle in V.

BEWEIS. Angenommen f hat keine Nullstelle in V. Wegen unserer Voraussetzung existiert eine offene Umgebung V_1 von $\overline{V}$ mit $V_1 \subseteq U$, sodass f auf V_1 nullstellenfrei ist. Setze $g(z) = 1/f(z)$, $z \in V_1$. Dann ist $g \in \mathcal{H}(V_1)$ und nach 2.39 ist

$$|f(c)|^{-1} = |g(c)| \leq \max_{z \in \partial V} |g(z)| = \left[\min_{z \in \partial V} |f(z)|\right]^{-1},$$

was einen Widerspruch ergibt. □

SATZ 2.47 (Satz von der offenen Abbildung). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(U)$, weiters sei f nirgends lokal konstant. Dann ist f eine offene Abbildung.*

BEWEIS. Sei $O \subseteq U$ offen, $c \in O$. Es ist zu zeigen, dass $f(O)$ eine offene Kreisscheibe um $f(c)$ enthält. O.B.d.A. $f(c) = 0$, sonst betrachte man an Stelle von f die Funktion $z \mapsto f(z) - f(c)$. f ist nicht konstant in einer Umgebung von c.
Wir behaupten, es gibt eine Kreisscheibe V mit Mittelpunkt c und $\overline{V} \subset O$ sowie $0 \notin f(\partial V)$. (Angenommen für jede Kreisscheibe V um c mit $\overline{V} \subset O$ existiert ein $z_0 \in \partial V$ mit $f(z_0) = 0$, dann folgt nach 2.27 $f \equiv 0$ in einer Umgebung von c. Widerspruch!)
Nun setzen wir $2\delta = \min_{z \in \partial V} |f(z)| > 0$ und $D = D_\delta(0)$. Wir zeigen : $D \subseteq f(O)$. Sei $b \in D$ beliebig, es gilt $|b| < \delta$ und daher

$$|f(z) - b| \geq |f(z)| - |b| > \delta \quad , \quad \forall z \in \partial V,$$

also ist

$$\min_{z \in \partial V} |f(z) - b| \geq \delta > |b| = |f(c) - b|.$$

Nun können wir 2.46 für die Funktion $z \mapsto f(z) - b$ verwenden und erhalten ein $z' \in V$ mit $f(z') - b = 0$. Dann ist $f(z') = b$ und daher $b \in f(O)$. □

BEMERKUNG. Sei $\pi_m(z) = z^m$, $m \in \mathbb{N}$. Dann ist π_m eine offene Abbildung. Jedes $w \neq 0$ wird von genau m verschiedenen Punkten z_k , $k = 1, \ldots, m$ getroffen, d.h. $\pi_m(z_k) = w$, $k = 1, \ldots, m$ für $w = re^{i\theta}$ ist $z_k = r^{1/m} e^{i(\theta + 2k\pi)/m}$, $k = 1, \ldots, m$. Lediglich der Punkt $w = 0$ hat nur sich selbst als Urbild (Verzweigungspunkt).
Wir werden zeigen, jede nichtkonstante holomorphe Funktion ist, bis auf eine additive Konstante, lokal von der Gestalt $\pi_m \circ \phi$, wobei ϕ invertierbar ist.

Lemma 2.48. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Definiere*

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & , \ z \neq w, \ z,w \in \Omega \\ f'(z) & , \ z = w \in \Omega. \end{cases}$$

Dann ist $g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Beweis. Es genügt, die Stetigkeit auf der Diagonalen $\{(a,a) : a \in \Omega\}$ zu zeigen. Sei dazu $a \in \Omega$ fix, $r > 0$ mit $D_r(a) \subseteq \Omega$ und

$$|f'(\zeta) - f'(a)| < \epsilon \ , \ \forall\, \zeta \in D_r(a).$$

Für $z, w \in D_r(a)$ sei $\zeta(t) = (1-t)z + tw \ , \ t \in [0,1]$ (Strecke von z nach w). Es gilt $\zeta(t) \in D_r(a) \ , \ \forall\, t \in [0,1]$. Wir berechnen nun das Integral

$$\int_0^1 f'(\zeta(t))\,dt = \frac{1}{-z+w}\int_0^1 f'(\zeta(t))(-z+w)\,dt = \frac{1}{-z+w}\int_0^1 \frac{df}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dt}\,dt$$
$$= \frac{1}{-z+w} \ \ f(\zeta(t))|_0^1 = \frac{f(z)-f(w)}{z-w}.$$

Also folgt

$$|g(z,w) - g(a,a)| = \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a)\right| = \left|\int_0^1 [f'(\zeta(t)) - f'(a)]\,dt\right|$$
$$\leq \sup_{t\in[0,1]} |f'(\zeta(t)) - f'(a)| \leq \epsilon.$$

□

Satz 2.49. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $\phi'(z_0) \neq 0$.*
Dann existiert eine offene Umgebung V von z_0, $V \subseteq \Omega$ mit
(1) $\phi|_V$ ist injektiv,
(2) die Funktion $\psi : \phi(V) \longrightarrow V$ definiert durch $\psi(\phi(z)) = z$, $z \in V$, ist holomorph auf $W = \phi(V)$, ϕ besitzt also auf V eine holomorphe Inverse.

Beweis. Nach 2.48 existiert eine offene Umgebung $V \subseteq \Omega$ von z_0 mit

$$|\phi(z_1) - \phi(z_2)| \geq \frac{1}{2}|\phi'(z_0)||z_1 - z_2| \ \ ,\forall\, z_1, z_2 \in V,$$

man wähle dazu V derart, dass

$$\left|\frac{\phi(z_1)-\phi(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geq \frac{|\phi'(z_0)|}{2}.$$

Ist nun $z_1, z_2 \in V$, $z_1 \neq z_2$, dann ist auch $\phi(z_1) \neq \phi(z_2)$ und ϕ ist injektiv auf V.

Da $\phi'(z_0) \neq 0$, kann man V noch zusätzlich so wählen, dass $\phi'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in V$. Für jedes $w \in W = \phi(V)$ existiert nach (1) ein eindeutig bestimmtes $z \in V$ mit $\phi(z) = w$. Dadurch ist ψ wohldefiniert.
Seien nun $z, z_1 \in V$ und $w, w_1 \in W$ so gewählt, dass $\phi(z) = w$, $\phi(z_1) = w_1$ bzw. $\psi(w) = z$, $\psi(w_1) = z_1$. Dann gilt

$$\frac{\psi(w) - \psi(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{\phi(z) - \phi(z_1)};$$

bei $w \to w_1$ geht $z \to z_1$ und somit strebt die linke Seite bei $w \to w_1$ gegen $\psi'(w_1)$ und die rechte Seite gleichzeitig gegen $1/\phi'(z_1)$, es gilt also

$$\psi'(w_1) = \frac{1}{\phi'(z_1)}$$

und da $\phi' \neq 0$ auf V, ist $\psi \in \mathcal{H}(W)$. □

SATZ 2.50. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nicht konstant, $z_0 \in \Omega$ und $w_0 = f(z_0)$. Sei m die Ordnung der Nullstelle z_0 der Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$.*
Dann existiert eine offene Umgebung $V \subseteq \Omega$ von z_0 und eine Funktion $\phi \in \mathcal{H}(V)$ mit
(1) $f(z) = w_0 + [\phi(z)]^m \quad , \ \forall\, z \in V$;
(2) ϕ ist invertierbar auf V.

BEMERKUNG. Auf V gilt $f - w_0 = \pi_m \circ \phi$, wobei $\pi_m(z) = z^m$. f ist somit eine m–zu–1 Abbildung auf $V \setminus \{z_0\}$.

BEWEIS. Sei o.B.d.A. Ω eine konvexe offene Umgebung von z_0 mit $f(z) \neq w_0 \ , \ \forall\, z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, ansonsten gäbe es eine Folge $(z_n)_n$ in Ω mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $f(z_n) = w_0 \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und dann würde nach 2.27 f konstant w_0 auf Ω sein, Widerspruch!
Nun folgt aus 2.26: $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z) \quad , \quad \forall z \in \Omega$, wobei $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $g \neq 0$ auf Ω. Nach 2.31 besitzt g einen holomorphen Logarithmus auf Ω, d.h. $\exists\, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $\exp(h) = g$ auf Ω. Setze nun

$$\phi(z) = (z - z_0)\exp(h(z)/m),$$

dann ist

$$[\phi(z)]^m = (z - z_0)^m \exp(h(z)) = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0.$$

Weiters ist

$$\phi'(z) = \exp(h(z)/m) + (z - z_0)h'(z)/m \exp(h(z)/m),$$

und da $\exp(h(z_0)/m) \neq 0$, ist $\phi'(z_0) \neq 0$. Durch eine etwaige Verkleinerung von V kann man auch $\phi' \neq 0$ auf V erreichen. Der Rest folgt nun aus 2.49 □

SATZ 2.51. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Weiters sei f injektiv auf Ω. Dann ist $f' \neq 0$ auf Ω und f besitzt eine holomorphe Inverse .*

BEWEIS. Angenommen $f'(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in \Omega$. f ist nach 2.50 in einer punktierten Umgebung von z_0 eine m–zu–1 Abbildung, mit $m > 1$, wegen $f'(z_0) = 0$. Widerspruch ! □

BEMERKUNG. Die Umkehrung des letzten Satzes ist falsch.

Beispiel. $f(z) = e^z \ , \ f'(z) = e^z \neq 0$ auf ganz $\mathbb{C}$. Die Exponentialfunktion ist jedoch nicht injektiv auf $\mathbb{C}$.

2.10. Holomorphe Parameterintegrale

Satz 2.52. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, und (X, μ) ein Maßraum, sowie*

$$L^1(\mu) = \{g : X \longrightarrow \mathbb{C} \ \ \textit{messbar} \ : \ \int_X |g| \, d\mu < \infty\}.$$

Ferner habe die Funktion $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften:
(i) $f(z, .) \in L^1(\mu)$ für alle $x \in \Omega$;
(ii) für alle $x \in X$ ist $f(., x) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph;
(iii) zu jeder kompakten Kreisscheibe $K \subset \Omega$ gibt es eine integrierbare nichtnegative Funktion g_K auf X, so dass fuer alle $z \in K$ gilt : $|f(z, .)| \leq g_K$ μ - fast überall.
Dann ist die Funktion $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_X f(z, x) \, d\mu(x) \ , \ z \in \Omega,$$

holomorph auf Ω, für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ ist

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, .)$$

integrierbar über X, und es gilt für $z \in \Omega$:

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, x) \, d\mu(x).$$

Beweis. Für die maßtheoretischen Begriffe siehe [**8**]. Es seien $a \in \Omega$ und $r > 0$ derart, dass $K := \overline{D_{2r}(a)} \subset \Omega$. für alle $z \in D_{2r}(a)$ ist dann nach der Cauchy'schen Integralformel 2.21 für Kreisscheiben

$$f(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(a)} \frac{f(\zeta, x)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Für alle $z, w \in D_r(a)$, $z \neq w$ gilt daher

$$\frac{F(z) - F(w)}{z - w} = \int_X \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(a)} \frac{f(\zeta, x)}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \, d\zeta \, d\mu(x).$$

Nun sei $(w_k)_k$ eine Folge in $D_r(a)$ mit $\lim_{k\to\infty} w_k = z$, wobei $w_k \neq z$ für alle k gelte; ferner sei

$$\varphi_k(z, x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(a)} \frac{f(\zeta, x)}{(\zeta - z)(\zeta - w_k)} \, d\zeta.$$

Dann ist

$$|\varphi_k(z, .)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi r \cdot \frac{1}{r^2} \, g_K(.) = \frac{2}{r} g_K(.) \quad \mu - \text{fast überall},$$

weil $|\zeta - a| = 2r$ und $w_k, z \in D_r(a)$ ist.
Weiters gilt

$$\varphi_k(z, .) = \frac{f(z, .) - f(w_k, .)}{z - w_k},$$

weil

$$\frac{f(\zeta, x)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta, x)}{\zeta - w_k} = \frac{(z - w_k) f(\zeta, x)}{(\zeta - z)(\zeta - w_k)}$$

und so die Cauchy'sche Integralformel auf die Definition von φ_k angewandt werden kann. Daher ist $\varphi_k(z,.)$ eine messbare Funktion. Im Integranden des Kurvenintegrals, welches φ_k definiert, herrscht beim Grenzübergang $z_k \to w$ gleichmäßige Konvergenz und daher gilt

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(z,x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(a)} \frac{f(\zeta,x)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \frac{\partial f}{\partial z}(z.x),$$

wobei die Cauchy'sche Integralformel für die erste Ableitung von f nach z verwendet wurde. Eine Anwendung des Satzes über die dominierte Konvergenz (siehe [**8**]) liefert nun die Behauptung des Satzes für $n = 1$, benützt man die Cauchy'sche Integralformel für die höheren Ableitungen, so erhält man das allgemeine Resultat. □

2.11. Komplexe Differentiale

Definition 2.53. Wir definieren das Differential dx als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$,

$$dx : z \mapsto (dx)_z = x \quad , \quad z = x + iy,$$

analog $(dy)_z = y$. Ist $f : M \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion, so ist

$$(df)_{z_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\ dy$$

das <u>vollständige Differential von f</u> an der Stelle z_0. Allgemeiner nennt man

$$\alpha = f\ dx + g\ dy$$

eine <u>1–Form</u>, dabei sind f, g Funktionen. Ist h eine weitere Funktion, so definiert man

$$h\alpha := hf\ dx + hg\ dy.$$

Insbesondere gilt für $f(z) = z$, bzw. $f(z) = \overline{z}$:

$$dz = dx + idy \ \text{ bzw. } \ d\overline{z} = dx - idy.$$

Erinnern wir uns an die partiellen Ableitungen nach z bzw. $\overline{z}$:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad bzw. \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

so zeigt eine einfache Rechnung

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}.$$

Ist f eine holomorphe Funktion. so folgt $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz$, da $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.
Unter der <u>2–Form</u> $dx \wedge dy : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ versteht man die alternierende 2–Linearform

$$dx \wedge dy(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}) = \begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{vmatrix} = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1.$$

Ist f eine Funktion, so ist

$$\omega = f(dx \wedge dy)$$

eine allgemeine 2–Form. Es gelten die folgenden Regeln

$$(f\ dx + g\ dy) \wedge (f_1\ dx + g_1\ dy) = (fg_1 - gf_1)dx \wedge dy \quad , \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx,$$

$$dz \wedge d\overline{z} = -2i\ dx \wedge dy,$$

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = d\overline{z} \wedge d\overline{z} = 0.$$

Das Differential einer 1–Form $\alpha = f\ dx + g\ dy$ ist definiert durch

$$d\alpha := df \wedge dx + dg \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\ dx \wedge dy.$$

Ist $\alpha = F\ dz + G\ d\overline{z}$, so gilt

$$d\alpha = \left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\right)\ dz \wedge d\overline{z}.$$

Weiters gilt $d(df) = 0$ und falls f reell differenzierbar ist

$$d(f\ dz) = -\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\ dz \wedge d\overline{z}.$$

Beispiel 2.54. Sei z fix und f eine reell differenzierbare Funktion. Sei ω die folgende 1–Form

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta \quad \text{für} \quad \zeta \neq z.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\partial f/\partial\overline{\zeta}}{\zeta - z} + f(\zeta)\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z})\right]\ d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial f/\partial\overline{\zeta}}{\zeta - z}\ d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \end{aligned}$$

da $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph ist.

Satz 2.55 (Stokes'sche Integralsatz). *Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$. ∂G sei ein positiv orientierter geschlossener Pfad und ω eine auf $\overline{G}$ stetig differenzierbare 1–Form. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega.$$

(Beweis siehe Reelle Analysis, z.B. [**26**].)

2.12. Die inhomogene Cauchy'sche Integralformel

Satz 2.56. *Sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ mit stückweise glattem, positiv orientierten Rand ∂G. Sei f in einer offenen Umgebung von $\overline{G}$ reell stetig differenzierbar. Dann gilt für $z \in G$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{(\partial f/\partial\overline{\zeta})(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Bemerkung. Ist $f \in \mathcal{H}(G)$, so ist $(\partial f/\partial\overline{\zeta})(\zeta) = 0$, $\forall \zeta \in G$ und daher

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

In diesem Sinne ist 2.56 eine Verallgemeinerung der Cauchy'schen Integralformel.

BEWEIS. Sei $z \in G$ fix und $r > 0$ derart, dass $D_r(z) \subseteq G$. Wir entfernen die Kreisscheibe $D_r(z)$ aus G und definieren $G_r = G \setminus \overline{D_r(z)}$, der Rand von G_r besteht aus dem positiv orientiertem Rand von G und der negativ orientierten Kreislinie κ_r (wandert man auf ∂G_r, so ist G_r immer zur Linken).
Für $\zeta \in G_r$ definieren wir die 1–Form

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

dann können wir den Stokes'schen Integralsatz 2.55 anwenden und erhalten wegen 2.54

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{G_r}\frac{(\partial f/\partial\overline{\zeta})(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Nunmehr führen wir den Grenzübergang $r \to 0$ durch. Zunächst zeigen wir, dass das Integral

$$\int_{D_s(0)}\frac{1}{|z|}\,dz \wedge d\overline{z}$$

existiert. Dazu gehen wir zu Polarkoordinaten über :

$$\int_{D_s(0)}\frac{1}{|z|}\,dz \wedge d\overline{z} = -2i\int_{D_s(0)}\frac{1}{|z|}\,dx \wedge dy = -2i\int_0^s\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}r\,drd\phi$$

das letzte Integral existiert offensichtlich.
Daraus folgt nun : die Funktion $\zeta \mapsto \frac{(\partial f/\partial\overline{\zeta})(\zeta)}{\zeta - z}$ ist absolut integrierbar auf ganz G, somit strebt bei $r \to 0$ das Integral

$$\int_{G_r}\frac{(\partial f/\partial\overline{\zeta})(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \quad \text{gegen} \quad \int_{G}\frac{(\partial f/\partial\overline{\zeta})(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Wir führen jetzt den Grenzübergang $r \to 0$ beim Kurvenintegral im Stokes'schen Integralsatz durch :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r}\frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= f(z)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r}\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta \\ &= -f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta,\end{aligned}$$

nun ist

$$\left|\int_{\kappa_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \le 2\pi r \max_{\zeta \in \kappa_r^*}\left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right| = 2\pi \max_{\zeta \in \kappa_r^*}|f(\zeta) - f(z)| \to 0,$$

bei $r \to 0$, da f stetig ist.
Daher strebt bei $r \to 0$ das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \text{gegen} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - f(z).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. □

2.13. Allgemeine Versionen des Cauchy'schen Integralsatzes

Definition 2.57. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ Pfade in Ω. Sei ferner $\Gamma^* = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j^*$ und für $f \in \mathcal{C}(\Gamma^*)$ sei

$$\tilde{\gamma}_j(f) = \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

$\tilde{\gamma}_j : \mathcal{C}(\Gamma^*) \longrightarrow \mathbb{C}$ kann als lineares Funktional auf $\mathcal{C}(\Gamma^*)$ aufgefass t werden. Wir setzen $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_1 + \cdots + \tilde{\gamma}_n$, und bezeichnen mit $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ die formale Summe der Pfade $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, dann ist für $f \in \mathcal{C}(\Gamma^*)$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \tilde{\Gamma}(f) = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

Man nennt Γ eine <u>Kette</u> in Ω, sind alle Pfade $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossen, so nennt man Γ einen <u>Zyklus</u> in Ω.

Bemerkung. (a) Eine Kette bzw. einen Zyklus kann man durch mehrere Summen von Pfaden darstellen.
(b) Mit $-\Gamma$ wird jener Zyklus bezeichnet, bei welchem alle γ_j , $j = 1, \dots, n$ in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden : für $f \in \mathcal{C}(\Gamma^*)$ ist

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz.$$

(c) Sind Γ_1 und Γ_2 Ketten bzw. Zyklen, so gilt für die Summe $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \quad , \ f \in \mathcal{C}(\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*).$$

Definition 2.58. Sei $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ ein Zyklus in Ω und $\alpha \notin \Gamma^*$. Mit

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - \alpha}$$

bezeichnen wir die <u>Windungszahl von Γ in Bezug auf α</u>. Es gilt

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = \sum_{j=1}^n \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(\alpha).$$

Satz 2.59 (Homologie–Version des Cauchy'schen Integralsatzes). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Γ ein Zyklus in Ω mit $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$, $\forall\, \alpha \notin \Omega$. Dann gilt*

$$f(z) \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw \quad , \ \forall\, z \in \Omega \setminus \Gamma^*,$$

weiters ist

$$\int_\Gamma f(w)\,dw = 0.$$

Sind Γ_0 und Γ_1 Zyklen in Ω mit

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) \quad , \ \forall\, \alpha \notin \Omega$$

dann ist

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz.$$

BEWEIS. (Dickson 1969)
Sei

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & , \ z \neq w, \ z,w \in \Omega \\ f'(z) & , \ z = w \in \Omega. \end{cases}$$

Nach 2.48 ist $g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Die erste Aussage des Satzes ist äquivalent zur Behauptung $h(z) = 0 \ , \ \forall \ z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, wobei

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\, dw,$$

denn es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\ f(z) \int_\Gamma \frac{dw}{z-w} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{z-w}\, dw$$
$$= -f(z)\, \mathrm{Ind}_\Gamma(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Wir zeigen zunächst : $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.
g ist gleichmäßig stetig auf allen kompakten Teilmengen von $\Omega \times \Omega$, ist daher $z \in \Omega$ und $z_n \to z$ in Ω, dann $g(z_n, w) \to g(z,w)$ gleichmäßig für $w \in \Gamma^*$ (kompakt). Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} h(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma g(z_n, w)\, dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} g(z_n,w)\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\, dw = h(z),$$

und h ist stetig auf Ω (Limes und Integral kann man wegen der gleichmäßigen Konvergenz vertauschen).
Sei nun Δ ein beliebiges Dreieck in Ω. Dann folgt aus dem Satz von Fubini

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \left(\int_\Gamma g(z,w)\, dw \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)\, dz \right) dw.$$

Bei fixem w hat die Funktion $z \mapsto g(z,w)$ an der Stelle $z = w$ eine hebbare Singularität (siehe 2.33), daher ist sie holomorph auf Ω und nach 2.17 ist

$$\int_{\partial\Delta} g(z,w)\, dz = 0 \quad , \ \forall \ w \in \Omega,$$

also ist

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\, dz = 0,$$

und nach 2.25. $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Nun beweisen wir $h(z) = 0 \ , \ \forall \ z \in \Omega \setminus \Gamma^*$.
Dazu sei $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$, wir definieren

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw,$$

dann ist $h_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, weiters ist für $z \in \Omega \cap \Omega_1$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\ f(z) \int_\Gamma \frac{dw}{z-w} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{z-w}\, dw = 0 + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = h_1(z).$$

Wir können daher durch den Ansatz

$$\phi(z) = \begin{cases} h(z) & , \ z \in \Omega \\ h_1(z) & , \ z \in \Omega_1 \end{cases}$$

eine auf $\Omega \cup \Omega_1$ holomorphe Funktion definieren.
Da nach Voraussetzung $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ , \ \forall \ \alpha \notin \Omega$, ist $\Omega^c \subseteq \Omega_1$ und somit ist $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C}$. Daher ist $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
Ω_1 enthält die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, da dort die Windungszahl immer Null ist (siehe 2.14), also gilt

$$\lim_{|z| \to \infty} \phi(z) = \lim_{|z| \to \infty} h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{|z| \to \infty} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw = 0,$$

nun ergibt 2.38 $\phi \equiv 0$, was $h(z) = 0 \ , \ \forall \ z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ impliziert.

Es bleibt noch, zu zeigen, dass $\int_\Gamma f(z) \, dz = 0$. Sei dazu $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ und $F(z) := (z - a) f(z)$. Nun verwenden wir den ersten Teil des Satzes für F und $z = a$:

$$0 = F(a) \ \mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(w)}{w - a} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w) \, dw.$$

Sind schließlich Γ_0 und Γ_1 Zyklen mit

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) \ , \ \forall \ \alpha \notin \Omega,$$

so gilt für $\Gamma = \Gamma_0 - \Gamma_1$: $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ , \ \forall \ \alpha \notin \Omega$ und daher nach dem ersten Teil des Satzes

$$0 = \int_\Gamma f(z) \, dz = \int_{\Gamma_0} f(z) \, dz - \int_{\Gamma_1} f(z) \, dz.$$

□

Bemerkung. (a) Ist $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ , \ \forall \ \alpha \notin \Omega$, so nennt man den Zyklus Γ <u>nullhomolog in Ω</u>.

(b) 2.59 ist eine Verallgemeinerung von 2.21 : ist Ω konvex und γ ein geschlossener Pfad in Ω, so ist $w \mapsto 1/(w - \alpha)$ holomorph auf Ω für jedes $\alpha \notin \Omega$ und daher gilt nach 2.18

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - \alpha} = 0.$$

Es sind also die Voraussetzungen von 2.59 erfüllt und somit folgen die Aussagen von 2.21 aus 2.59

Beispiel. Sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus (D_{1/2}(-2) \cup D_{1/2}(0) \cup D_{1/2}(2))$, ferner $\gamma_1(t) = -2 + \frac{3}{4}e^{it}, \ \gamma_2(t) = \frac{3}{4}e^{it}, \ \gamma_3(t) = 2 + \frac{3}{4}e^{it}, \ \Gamma(t) = 6e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$. Weiters sei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Dann gilt

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = \mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) \ , \forall \ \alpha \notin \Omega$$

und daher nach 2.59 für jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

$$\int_\gamma f(z) \, dz = \int_\Gamma f(z) \, dz.$$

Definition 2.60. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $\gamma_0,\ \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \Omega$ geschlossene Kurven (nur stetig). γ_0 und γ_1 heißen <u>Ω– homotop</u>, wenn eine stetige Funktion

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$$

existiert mit

$$H(s,0) = \gamma_0(s) \quad , \ \forall\ s \in [0,1]\ ;\ H(s,1) = \gamma_1(s) \quad , \ \forall\ s \in [0,1]$$

und

$$H(0,t) = H(1,t) \quad , \ \forall\ t \in [0,1].$$

Wir setzen $\gamma_t(s) = H(s,t)$ für ein fixes $t \in [0,1]$ und $s \in [0,1]$. Da $H(0,t) = H(1,t)$, sind die Kurven γ_t auch geschlossen. Wir erhalten eine <u>einparameter Familie</u> γ_t , $t \in [0,1]$ von geschlossenen Kurven, welche γ_0 und γ_1 miteinander verbinden.

Wenn eine geschlossene Kurve γ_0 Ω–homotop zur konstanten Kurve (Punktkurve) ist, dann heißt γ_0 <u>nullhomotop</u>.

Ein Gebiet Ω heißt <u>einfach zusammenhängend</u>, wenn jede geschlossene Kurve in Ω nullhomotop ist.

Beispiel. Sei Ω konvex, γ eine geschlossene Kurve in Ω und $z_0 \in \Omega$. Wir setzen

$$H(s,t) = (1-t)\gamma(s) + tz_0\ ,\ \ s,t \in [0,1].$$

Dann gilt $H(s,0) = \gamma(s)$ und $H(s,1) = z_0$, $\forall\ s \in [0,1]$. Da $\gamma(0) = \gamma(1)$, folgt

$$H(0,t) = (1-t)\gamma(0) + tz_0 = (1-t)\gamma(1) + tz_0 = H(1,t)\ ,\ \forall\ t \in [0,1].$$

Ferner ist bei fixem s der Ausdruck $H(s,t) = (1-t)\gamma(s) + tz_0$, $t \in [0,1]$ die Verbindungsstrecke von $\gamma(s)$ nach z_0, welche wegen der Konvexität von Ω ganz in Ω verläuft, somit gilt $H(s,t) \in \Omega$, $\forall\ s,t \in [0,1]$ und γ ist nullhomotop. Daher ist Ω einfach zusammenhängend.

Lemma 2.61. *Seien γ_0 und γ_1 geschlossene Pfade in $\mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ derart, dass*

$$|\gamma_0(s) - \gamma_1(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \quad , \ \forall\ s \in [0,1].$$

Dann gilt $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt sofort $\alpha \notin \gamma_0^*$ und $\alpha \notin \gamma_1^*$.
Wir setzen

$$\gamma(s) = \frac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha} \quad , \ s \in [0,1],$$

dann gilt für die Ableitung

$$\gamma'(s) = \frac{(\gamma_0(s) - \alpha)\gamma_1'(s) - (\gamma_1(s) - \alpha)\gamma_0'(s)}{(\gamma_0(s) - \alpha)^2}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} &= \frac{(\gamma_0(s) - \alpha)\gamma_1'(s) - (\gamma_1(s) - \alpha)\gamma_0'(s)}{(\gamma_0(s) - \alpha)^2}\ \frac{\gamma_0(s) - \alpha}{\gamma_1(s) - \alpha} \\ &= \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - \alpha} - \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - \alpha}.\end{aligned}$$

Weiters ist nach Voraussetzung

$$|1 - \gamma(s)| = \left|\frac{\gamma_0(s) - \gamma_1(s)}{\gamma_0(s) - \alpha}\right| < 1,$$

also $\gamma^* \subset D_1(1)$ und nach 2.14 $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$. Somit folgt

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s)-\alpha}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s)-\alpha}\,ds = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha). \end{aligned}$$

□

Satz 2.62 (Homotopie–Version des Cauchy'schen Integralsatzes). *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, ferner Γ_0 und Γ_1 geschlossene Pfade in Ω, welche Ω–homotop sind. Sei ferner $\alpha \notin \Omega$. Dann gilt*

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha)$$

und nach 2.59

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz\ ,\ \forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Beweis. Sei H eine Homotopiefunktion zwischen Γ_0 und Γ_1. Die Schwierigkeit des Beweises beruht auf der Tatsache, dass die einparameter Familie $\Gamma_t(s) = H(s,t)$ aus nicht notwendigerweise stückweise differenzierbaren Kurven besteht. Wir werden die Kurven Γ_t durch passende Pfade, in unserem Fall durch Polygonzüge, approximieren.
Sei $\alpha \notin \Omega$ fix. Da H auf der kompakten Menge $[0,1]\times[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, können wir die folgenden Aussagen treffen:
$\exists \epsilon > 0$ mit

$$|\alpha - H(s,t)| > 2\epsilon\ ,\ \forall\ s,t \in [0,1]; \tag{2.3}$$

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit

$$|H(s,t) - H(s',t')| < \epsilon/2, \tag{2.4}$$

falls $|s-s'| + |t-t'| < 1/n$.
Nun definieren wir die approximierenden Polygonzüge : für $k = 0,1,\dots,n$ und $s \in [0,1]$ sei

$$\gamma_k(s) = H\left(\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)\ (ns+1-j) + H\left(\frac{j-1}{n},\frac{k}{n}\right)\ (j-ns),$$

für $j-1 \le ns \le j\ ,\ j = 1,\dots,n$.
Man überzeugt sich leicht, dass die Kurven $\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n$ geschlossen sind. Außerdem sind sie stückweise differenzierbar, da die Variable s nicht als Argument in der nur stetigen Funktion H vorkommt, sondern nur in linearen Termen.
Aus (2.4) und der Definition von γ_k folgt nun

$$\left|\gamma_k(s) - H\left(s,\frac{k}{n}\right)\right| < \epsilon, \tag{2.5}$$

für $s \in [0,1]$ und $k = 0,1,\dots,n$.

Für $j-1 \leq ns \leq j$ gilt $j - ns \leq 1$, daher ist

$$\begin{aligned}\left|\gamma_k(s) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right| &= \left|H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)\ (ns+1-j) + H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\ (j-ns) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leq (j-ns)\left|H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right| + \left|H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $k = 0$

$$|\gamma_0(s) - H(s,0)| = |\gamma_0(s) - \Gamma_0(s)| < \epsilon$$

und für $k = n$

$$|\gamma_n(s) - H(s,1)| = |\gamma_n(s) - \Gamma_1(s)| < \epsilon.$$

Nun ergibt sich aus (2.3) und (2.5)

$$\begin{aligned}|\alpha - \gamma_k(s)| &= |\alpha - H(s,k/n) - (\gamma_k(s) - H(s,k/n))| \\ &\geq |\alpha - H(s,k/n)| - |\gamma_k(s) - H(s,k/n)| \\ &> 2\epsilon - \epsilon = \epsilon,\end{aligned}$$

für $s \in [0,1]$ und $k = 0, 1, \ldots, n$. Weiters folgt aus (2.4) und der Definition von γ_k

$$|\gamma_{k-1}(s) - \gamma_k(s)| < \epsilon,$$

für $s \in [0,1]$ und $k = 1, \ldots, n$.
Denn für $j-1 \leq ns \leq j$ gilt $ns + 1 - j \leq 1$, und daher ist

$$\begin{aligned}|\gamma_{k-1}(s) - \gamma_k(s)| \leq (ns+1-j)&\left|H\left(\frac{j}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)\right| \\ + (j-ns)&\left|H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k-1}{n}\right) - H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right| \\ < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.&\end{aligned}$$

Da $|\alpha - \gamma_k(s)| > \epsilon$ und $|\gamma_{k-1}(s) - \gamma_k(s)| < \epsilon$ gilt, folgt

$$|\gamma_{k-1}(s) - \gamma_k(s)| < |\alpha - \gamma_k(s)|\ ,$$

$\forall\ s \in [0,1]$ und $k = 1, \ldots, n$.
Aus gleichen Gründen ist

$$|\gamma_0(s) - \Gamma_0(s)| < |\alpha - \Gamma_0(s)| \quad \text{und} \quad |\gamma_n(s) - \Gamma_1(s)| < |\alpha - \Gamma_1(s)|,$$

$\forall\ s \in [0,1]$.
Wir können nun 2.61 der Reihe nach für die Paare

$$(\Gamma_0, \gamma_0),\ (\gamma_0, \gamma_1),\ \ldots,\ (\gamma_{n-1}, \gamma_n),\ (\gamma_n, \Gamma_1)$$

verwenden und erhalten

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \ldots \mathrm{Ind}_{\gamma_{n-1}}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_n}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha).$$

□

KOROLLAR 2.63. *(a) Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Pfad in Ω. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $a \in \Omega$. Ferner sei γ ein geschlossener Pfad in $\Omega \setminus \{a\}$, welcher nullhomotop in Ω ist. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

$$f^{(n)}(a)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

BEWEIS. (b) Für $n = 1$ folgt die Behauptung unmittelbar aus 2.59, anschließend kann unter dem Integral differenziert werden, um die allgemeine Aussage zu erzielen. □

BEMERKUNG. Es stellt sich hier die Frage, ob Nullhomotopie und Nullhomologie von geschlossenen Pfaden äquivalent ist. Ist Ω ein Gebiet und γ ein geschlossener nullhomotoper Pfad in Ω, dann ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = 0 \quad , \ \forall\ \alpha \notin \Omega,$$

dies folgt nach 2.62 aus der Holomorphie der Funktion $z \mapsto 1/(z-\alpha)$ und der Nullhomotopie von γ. Also ist γ auch nullhomolog. Jeder nullhomotope Pfad ist somit nullhomolog. Die Umkehrung ist falsch (siehe Übungen).
Ist jedoch *jeder* geschlossene Pfad in Ω nullhomolog, so ist jeder geschlossene Pfad auch nullhomotop und Ω daher einfach zusammenhängend (siehe Kapitel 4, Abschnitt 9).

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei nützlichen Aussagen über Windungszahlen.

DEFINITION 2.64. Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Weg. Wir sagen, γ verläuft in G von Rand zu Rand, wenn
(1) $\exists\ t_1, t_2 \in [0,1], \quad t_1 < t_2, \quad \gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \partial G, \quad \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$;
(2) für $t_1 < t < t_2$ ist $\gamma(t) \in G$;
(3) für $t \in [0,1]$ aber $t \notin [t_1, t_2]$ ist $\gamma(t) \notin \overline{G}$;
(4) $G \setminus \gamma^*$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten und $\gamma^* \cap G$ ist im Rand jeder dieser beiden Komponenten.

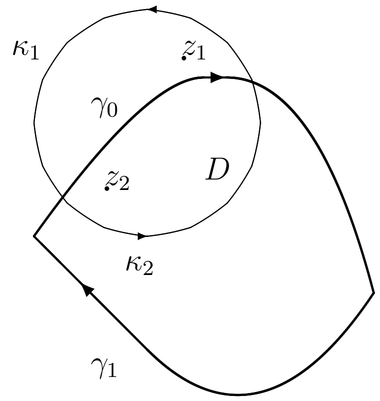
BEMERKUNG. Ist γ injektiv und glatt, $z_0 \in \gamma^*$ beliebig, dann existiert eine Umgebung U von z_0, sodass γ in U von Rand zu Rand verläuft.

SATZ 2.65. *Sei γ ein geschlossener Pfad in $\mathbb{C}$ und D eine Kreisscheibe. γ verlaufe in D von Rand zu Rand. Seien $t_1, t_2 \in [0,1]$ mit $t_1 < t_2$ und $a = \gamma(t_1)$, $b = \gamma(t_2)$, $a, b \in \partial D$, sowie $\gamma|_{[t_1,t_2]} = \gamma_0$. Weiters seien D_1, D_2 die beiden Zusammenhangskomponenten von $D \setminus \gamma^*$. Es liege D_1 links von γ.*
Dann gilt für $z_1 \in D_1$ und $z_2 \in D_2$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_2) + 1.$$

BEMERKUNG. Da für einen beliebigen Pfad γ in $\mathbb{C}$ die Windungszahl $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$, $\forall\ z$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, kann man den obigen Satz dazu verwenden, die Windungszahlen für γ sukzessive zu berechnen.

Beweis. Wir zerlegen $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, sowie ∂D in κ_1 und κ_2 (positiv orientiert), $\kappa_1^* \subset \partial D_1$, $\kappa_2^* \subset \partial D_2$.



Dann gilt

$$\mathrm{Ind}_{-\kappa_1+\gamma_1}(z_1) = \mathrm{Ind}_{-\kappa_1+\gamma_1}(z_2)$$

und daher

$$\mathrm{Ind}_{\kappa_1}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\kappa_1}(z_2) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2).$$

Hier entsprechen die Windungszahlen für die nicht geschlossenen Pfade der Zerlegung der Integrale (Windungszahlen wurden an und für sich nur für geschlossene Pfade eingeführt). Da z_2 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus (\kappa_1 + \gamma_0)^*$ liegt, ist

$$\mathrm{Ind}_{\kappa_1+\gamma_0}(z_2) = 0.$$

Außerdem ist

$$\mathrm{Ind}_{\kappa_2-\gamma_0}(z_1) = 0.$$

Aus diesen Formeln folgt nun

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\gamma}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\gamma}(z_2) &= \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_2) + \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_2)\\ &= \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_2) + \mathrm{Ind}_{\kappa_1}(z_1) - \mathrm{Ind}_{\kappa_1}(z_2) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_1) + \mathrm{Ind}_{\kappa_1}(z_1)\\ &= \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z_1) + \mathrm{Ind}_{\kappa_1}(z_1) + \mathrm{Ind}_{\kappa_2-\gamma_0}(z_1) = \mathrm{Ind}_{\kappa_1+\kappa_2}(z_1) = 1.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.66. *Sei $A \subset \mathbb{C}$ eine kompakte und $U \supset A$ eine offene Menge. Dann existiert ein Zyklus Γ in $U \setminus A$ mit*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 1 \ , \ \forall\ a \in A \ \textit{und} \ \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \ , \ \forall\ z \notin U.$$

Beweis. 1.) Zunächst setzen wir voraus, dass A zusammenhängend ist.
Sei $\delta > 0$ derart, dass $0 < 2\delta < \mathrm{dist}(A, \partial U)$. Wir legen ein achsenparalleles Gitter mit Maschenlänge δ und orientieren die einzelnen Gitterquadrate positiv. Da A kompakt ist, existieren endlich viele Gitterquadrate $Q_1, \ldots, Q_n$ mit $Q_j \cap A \neq \emptyset$, $j = 1, \ldots, n$. Sei Γ_j der Randzyklus von Q_j und

$$\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n.$$

Sei o.B.a.A. $a \in Q_1^\circ$. (Liegt a auf einer Seite eines Gitterquadrates, so liegt a im Innern der Vereinigung von vier benachbarten Gitterquadraten.)

$$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\Gamma_j}(a) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(a) = 1.$$

In Γ kommen nur solche Strecken $[p, q]$ vor, die eine Seite genau eines Gitterquadrates sind, das sind diejenigen, welche außerhalb von A liegen (diejenigen Seiten von Gitterquadraten, die mit A nichtleeren Durchschnitt haben, werden jeweils in der einen und der anderen Richtung durchlaufen und fallen daher heraus).
Für jede solche Strecke $[p, q]$ gilt : $[p, q] \cap A = \emptyset$ (sonst hätten beide an $[p, q]$ angrenzenden Quadrate Punkte mit A gemeinsam). Wir bezeichnen den so entstehenden Randzyklus wieder mit Γ. Es gilt dann $\Gamma^* \cap A = \emptyset$.
Weiters folgt aus der Wahl der Maschenlänge $\Gamma^* \subset U$. Somit ist $\Gamma^* \subset U \setminus A$.
Da A zusammenhängend ist, folgt aus Satz 2.14 $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 1$, $\forall\, a \in A$.
Ist $z \notin U \;\Rightarrow \mathrm{Ind}_{\Gamma_j}(z) = 0$, $j = 1, \ldots, n \;\Rightarrow \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$.

2.) A hat endlich viele Zusammenhangskomponenten $A_1, \ldots A_N$.
In diesem Fall wählen wir in jeder Zusammenhangskomponente einen Punkt $a_j \in A_j$, $j = 1, \ldots, N$ und legen ein achsenparalleles Gitter mit Maschenlänge $\delta > 0$, wobei

$$2\delta < \min\{\mathrm{dist}(A, \partial U), |a_j - a_k|\ j \neq k\},$$

derart dass verschiedene a_j im Innern verschiedener Netzquadrate liegen.
Es folgt $\mathrm{Ind}_\Gamma(a_j) = 1$ und daher $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 1$ für jedes $a \in A_j$, $j = 1, \ldots, N$. Alles weitere erschließt man wie im ersten Fall.

3.) Allgemeine Fall : (A könnte unendlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen)
Für jedes $z \in A$ existiert ein achsenparalleles offenes Quadrat $Q(z)$ mit $z \in Q(z) \subset\subset U$; da A kompakt ist, überdecken endlich viele dieser Quadrate ganz A, wir bezeichnen diese mit $Q_1, \ldots, Q_m$. Sei nun

$$A_0 = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{Q}_j \subset U.$$

A_0 ist kompakt und hat nur endlich viele Zusammenhangskomponenten. Es genügt die Behauptung für A_0 an Stelle von A zu beweisen, und dies folgt aus 2.). □

2.14. Laurentreihen und meromorphe Funktionen

Satz 2.67. *Sei* $D_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ *ein Kreisring, dabei sei für* $r = 0 :$ $D_{0,R}(a) = D_R(a) \setminus \{a\}$ *und* $D_{r,\infty}(a) = \{z : |z - a| > r\}$. *Sei* $f \in \mathcal{H}(D_{r,R}(a))$, *ferner* $U_1 = D_{r,\infty}(a)$, $U_2 = D_R(a)$. *Dann existiert ein* $f_1 \in \mathcal{H}(U_1)$ *und ein* $f_2 \in \mathcal{H}(U_2)$ *mit*

$$f = f_1 + f_2, \quad \text{auf } U_1 \cap U_2 = D_{r,R}(a).$$

Dabei kann f_1 *so gewählt werden, dass* $\lim_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0$. *Dadurch sind* f_1 *und* f_2 *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Für $r < \rho < R$ sei

$$f_{2,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

wobei $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$. Da der Integrand als Funktion in z holomorph auf $D_\rho(a)$ ist, folgt $f_{2,\rho} \in \mathcal{H}(D_\rho(a))$. Nach 2.62 ist $f_{2,\rho}(z) = f_{2,\rho'}(z)$ auf $D_\rho(a)$ für $r < \rho < \rho' < R$.
Ist nun $z \in U_2 = D_R(a)$ und $\max\{r, |z - a|\} < \rho < R$, dann definiere

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

da das obige Integral unabhängig von ρ ist, solange $r < \rho < R$ ist (siehe obige Feststellung), ist $f_2 \in \mathcal{H}(U_2)$.
Ist $z \in U_1 = \{z : |z-a| > r\}$ und $r < \sigma < \min\{R, |z-a|\}$, dann definiere

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Wie oben folgt nun $f_1 \in \mathcal{H}(U_1)$, weiters folgt aus der Definition von f_1 sofort $\lim_{|z|\to\infty} |f_1(z)| = 0$.
Ist $z \in D_{r,R}(a)$, so wählen wir ρ und σ derart, dass

$$r < \sigma < |z-a| < \rho < R$$

und definieren den Zyklus $\Gamma = \gamma_\rho - \gamma_\sigma$.
Es folgt $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$, $\forall\ \alpha \notin D_{r,R}(a)$ und $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$. Somit können wir 2.59 anwenden und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f_1(z) + f_2(z).$$

Es bleibt noch, die Eindeutigkeit der Darstellung $f = f_1 + f_2$ zu beweisen. Sei dazu $f = g_1 + g_2$ eine andere Darstellung mit $g_1 \in \mathcal{H}(U_1)$ und $g_2 \in \mathcal{H}(U_2)$, sowie $\lim_{|z|\to\infty} |g_1(z)| = 0$.
Dann gilt $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ auf $U_1 \cap U_2$, daher ist durch den Ansatz

$$h = \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{auf } U_1 \\ g_2 - f_2 & \text{auf } U_2 \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion auf $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}$ definiert.
Also ist $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ und $\lim_{|z|\to\infty} |h(z)| = 0$. Dies bedeutet, dass h eine ganze, beschränkte Funktion ist und daher ist nach 2.38 $h \equiv 0$, also $f_1 = g_1$ und $f_2 = g_2$. □

Bemerkung. Man nennt f_1 den Hauptteil von f und f_2 den Nebenteil von f.
Da f_2 auf $D_R(a)$ holomorph ist, kann man f_2 in eine Taylorreihe entwickeln

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \ z \in D_R(a).$$

Sei $F(w) = a + 1/w$. Dann ist F eine biholomorphe Abbildung von $D'_{1/r}(0) = \{w : 0 < |w| < 1/r\}$ nach $U_1 = \{w : |w-a| > r\}$. Daher ist die zusammengesetzte Funktion $f_1 \circ F \in \mathcal{H}(D'_{1/r}(0))$.
Wegen $\lim_{|z|\to\infty} |f_1(z)| = 0$ ist $\lim_{w\to 0} (f_1 \circ F)(w) = 0$. Somit hat $f_1 \circ F$ nach 2.33 eine hebbare Singularität an der Stelle 0, also ist $f_1 \circ F \in \mathcal{H}(D_{1/r}(0))$ und wir können diese Funktion in eine Taylorreihe um den Nullpunkt entwickeln :

$$(f_1 \circ F)(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n,$$

wobei die Reihe auf $\overline{D_{1/\rho}(0)}$ $\rho > r$, gleichmäßig konvergent ist.
Setzt man nun für $w = 1/(z-a)$, so ist $F(w) = z$ und

$$f_1(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n,$$

wobei $a_{-n} = b_n$ und die Reihe auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D_\rho(a)}$, $\rho > r$ gleichmäßig konvergiert.

Satz 2.68. *Sei $f \in \mathcal{H}(D_{r,R}(a))$. Dann kann man f in der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

darstellen (Laurentreihe[7] von f in $D_{r,R}(a)$), wobei die Reihe gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $D_{r,R}(a)$ konvergiert und

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad , \; n \in \mathbb{Z}$$

mit $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{2\pi i t} \quad , t \in [0,1] \quad , \; r < \rho < R$.

Beweis. Es bleibt nur noch die Formel für a_n zu beweisen. Es gilt

$$(z-a)^{-n-1}f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_{k+n+1}(z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1}(z-a)^k$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf γ_ρ^*. Daher liefert gliedweise Integration

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz = a_n \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i a_n,$$

alle Summanden sind Null, bis auf $k = -1$. □

Beispiel 2.69. 1) Sei $f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$.
(a) Laurententwicklung in $D_1'(0) = \{z : 0 < |z| < 1\}$:

$$\frac{1}{z(z-i)^2} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{(1-z/i)^2} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z}{i}\right)^n = -\frac{1}{z} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{i^n}\;z^n.$$

(b) Laurententwicklung in $D_{1,\infty}(0) = \{z : |z| > 1\}$:

$$\frac{1}{z(z-i)^2} = \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{(1-i/z)^2} = \sum_{n=-3}^{-\infty} i^{-n-1}(n+2)z^n.$$

(c) Laurententwicklung in $D_{0,1}(i) = \{z : 0 < |z-i| < 1\}$:

$$\frac{1}{z(z-i)^2} = \frac{-i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z} = \frac{-i}{(z-i)^2} + \frac{1}{z-i} - \frac{i}{1-i(z-i)} = \ldots,$$

wobei der letzte Term als Summe einer geometrischen Reihe wird.
2) Man betrachte die Laurentreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

mit unendlich vielen negativen Potenzen von z. Der erste Summand konvergiert gegen $\frac{1}{z-1}$ für $\mid z \mid > 1$ und der zweite Summand gegen $\frac{1}{2-z}$ für $\mid z \mid < 2$. Also konvergiert die gesamte Reihe gegen die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2-z}$ auf dem Kreisring $D_{1,2}(0)$. Die Funktion f ist an der Stelle $z = 0$ holomorph, obwohl die Laurentreihe im Kreisring $D_{1,2}(0)$ unendlich viele negative Potenzen von z besitzt.

[7] Laurent, Pierre Alphonse (1813–1854)

Bemerkung. Nach 2.34 sieht man leicht, dass die Funktion f im Punkt a genau dann einen Pol k-ter Ordnung besitzt, wenn die Laurententwicklung von f in der punktierten Kreisscheibe $D'_r(a)$ von der Gestalt

$$f(z) = a_{-k}(z-a)^{-k} + \dots + a_{-1}(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

ist, mit $a_{-k} \neq 0$.
Somit hat eine Funktion f im Punkt a genau dann eine wesentliche Singularität, wenn bei der Laurententwicklung von f in der punktierten Kreisscheibe $D'_r(a)$ unendlich viele Terme der Gestalt $a_{-k}(z-a)^{-k}$ auftreten, wobei $k > 0$ und $a_{-k} \neq 0$.

Definition 2.70. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und P eine diskrete Teilmenge von U. $f : U \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt meromorph auf U, wenn $f \in \mathcal{H}(U \setminus P)$ und f in P Pole hat.
$\mathcal{M}(U)$ bezeichnet die Menge der meromorphen Funktionen auf U.

Beispiele. 1) Sei $U = D_1(0)$ und $f(z) = 1/z$. Dann ist $f \in \mathcal{M}(U)$.
Jede rationale Funktion p/q, p und q Polynome, ist in $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.
2) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \Rightarrow \quad \tan z \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Hier ist die Menge der Polstellen unendlich.
3) Sei $f, g \in \mathcal{H}(U)$, weiters $g \not\equiv 0$ auf jeder Zusammenhangskomponente von U. Dann ist $f/g \in \mathcal{M}(U)$. (siehe 2.26)

Satz 2.71. *Sei $f \in \mathcal{M}(U)$. Dann existiert für jedes $a \in U$ eine offene Umgebung V von a, sowie $g, h \in \mathcal{H}(V)$, sodass $f = g/h$ auf V.*

Beweis. Ist a kein Pol von f, setzen wir $g = f$ und $h \equiv 1$ und nehmen für $V = U \setminus P_f$, wobei P_f die Polstellen von f bezeichnet. Dann ist $f = g/h$ auf V und $g, h \in \mathcal{H}(V)$.
Ist a ein Pol der Ordnung $m > 0$ von f, dann existieren nach 2.34 komplexe Zahlen $c_1, \dots, c_m$ $(c_m \neq 0)$, sodass

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} = \phi(z)$$

in a eine hebbare Singularität besitzt. Also ist

$$f(z) = \phi(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} = \frac{1}{(z-a)^m} \left[(z-a)^m \phi(z) + \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{m-k} \right],$$

wobei der Ausdruck in der eckigen Klammer in einer Umgebung von a holomorph ist, bezeichnet man ihn mit g, so gilt $g(a) = c_m \neq 0$. □

Satz 2.72. *Sei $f \in \mathcal{M}(U)$ und a ein Pol von f. Dann gilt*

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \infty,$$

d.h. : für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(D'_\delta(a)) \subseteq \mathbb{C} \setminus K$.

Beweis. Aus dem vorigen Beweis folgt

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \left[(z-a)^m \phi(z) + \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{m-k} \right],$$

mit $c_m \neq 0$. Nun liefert der Grenzübergang $z \to a$ die gewünschte Aussage. □

SATZ 2.73. *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Dann ist $\mathcal{M}(\Omega)$ bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation ein Körper.*

2.15. Der Residuensatz

DEFINITION 2.74. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U bis auf isolierte Singularitäten. Sei a eine Singularität von f. Dann gibt es ein $r > 0$, sodass f in $D'_r(a)$ als Laurentreihe darstellbar ist

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

den Koeffizieneten $c_{-1} = \operatorname{Res}(f;a)$ nennt man das <u>Residuum</u> von f an der Stelle a.

SATZ 2.75 (Residuensatz). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und f holomorph auf U bis auf isolierte Singularitäten. Die Menge der Singularitäten von f sei mit S_f bezeichnet. Sei Γ ein Zyklus in $U \setminus S_f$ mit $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ \ \forall\, \alpha \notin U$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in S_f} \operatorname{Res}(f;a)\operatorname{Ind}_\Gamma(a).$$

BEWEIS. Zunächst zeigen wir, dass die $B = \{a \in S_f : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ endlich ist (daraus folgt die Endlichkeit der obigen Summe).
Sei dazu $W = \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$. $\operatorname{Ind}_\Gamma$ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente V von W. Ist V unbeschränkt oder ist $V \cap (\mathbb{C}\setminus U) \neq \emptyset$, dann ist $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ ,\ \forall\, \alpha \in V$, wegen der Voraussetzung $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \ \ \forall\, \alpha \notin U$.
S_f hat keinen Häufungspunkt in U, kann sich also nur am Rand von U häufen, also nur in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von W oder falls $V \cap (\mathbb{C}\setminus U) \neq \emptyset$. Es gilt $\operatorname{dist}(\Gamma^*, \partial U) > 0$, somit kann B nur endlich sein.
Sei also $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, ferner Q_j der Hauptteil von f bei Laurententwicklung um $a_j \ ,\ j = 1, \dots, n$. Setze

$$g = f - (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n),$$

(falls $B = \emptyset$, setze $g = f$) dann hat g hebbare Singularitäten in den Punkten von B, also gilt $g \in \mathcal{H}(U_0)$, wobei $U_0 = U \setminus (S_f \setminus B)$. Daher gilt nach 2.59

$$\int_\Gamma g(z)\,dz = 0$$

und nach Definition von g folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_\Gamma Q_k(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(Q_k;a_k)\operatorname{Ind}_\Gamma(a_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f;a_k)\operatorname{Ind}_\Gamma(a_k).\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Ist U konvex und Γ ein geschlossener, doppelpunktfreier, positiv orientierter Pfad in U, sowie f holomorph in U bis auf isolierte Singularitäten, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum \operatorname{Res}(f;a_k),$$

wobei die Summe über alle Singularitäten erstreckt wird, die im Innern von Γ liegen.

Satz 2.76. (a) *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und seien f und g holomorph auf U bis auf isolierte Singularitäten. Dann gilt :*

$$\operatorname{Res}(f+g;a) = \operatorname{Res}(f;a) + \operatorname{Res}(g;a)$$

und für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{Res}(\alpha_1 f + \alpha_2 g;a) = \alpha_1 \operatorname{Res}(f;a) + \alpha_2 \operatorname{Res}(g;a).$$

(b) *Ist z_0 ein Pol erster Ordnung von f, dann ist*

$$\operatorname{Res}(f;z_0) = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)].$$

(c) *Ist g holomorph in z_0 und hat f ein Pol der Ordnung 1 in z_0, dann ist*

$$\operatorname{Res}(fg;z_0) = g(z_0)\operatorname{Res}(f;z_0).$$

(d) *Ist h holomorph in z_0 und z_0 eine einfache Nullstelle von h, dann ist*

$$\operatorname{Res}(1/h;z_0) = 1/h'(z_0).$$

(e) *Ist z_0 ein Pol der Ordnung n von f, dann ist*

$$\operatorname{Res}(f;z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]\right\}.$$

Beweis. (a) folgt sofort aus den Laurententwicklungen von f und g um a.

(b) f hat um z_0 die Laurententwicklung

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

daraus folgt

$$(z-z_0)f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+1},$$

und beim Grenzübergang $z \to z_0$ verschwindet die unendliche Reihe.

(c) Es gilt

$$g(z) = g(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \quad , \quad f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

$$\Rightarrow f(z)g(z) = \frac{g(z_0)c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n.$$

(d) $1/h$ hat in z_0 einen Pol der Ordnung 1. Also ergibt (b)

$$\operatorname{Res}(1/h;z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} = 1/h'(z_0).$$

(e) Es gilt

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

und daraus folgt

$$(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+n}.$$

$(n-1)$–maliges Differenzieren ergibt nun die Behauptung. □

Satz 2.77 (Satz von Rouché). [8] *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sei γ ein geschlossener, nullhomologer Pfad in Ω. Wir setzen weiters voraus, dass f auf γ^* keine Nullstellen besitzt und $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 1$ oder $= 0$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Sei ferner $\Omega_1 = \{z \in \Omega : \operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1\}$ und N_f die Anzahl der Nullstellen (Vielfachheiten miteingerechnet) von f in Ω_1. Dann gilt*

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \operatorname{Ind}_\Gamma(0),$$

wobei $\Gamma = f \circ \gamma$. Weiters gilt für eine Funktion $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad , \ \forall\, z \in \gamma^*,$$

$N_g = N_f$.

Beweis. Sei $\phi = f'/f$. Dann ist $\phi \in \mathcal{M}(\Omega)$. Sei nun a eine Nullstelle von f der Ordnung $m(a)$. Dann gilt nach 2.26

$$f(z) = (z-a)^{m(a)} h(z),$$

wobei h in einer Umgebung von a holomorph ist und dort $h \neq 0$. $\Rightarrow$

$$\phi(z) = \frac{m(a)(z-a)^{m(a)-1} h(z) + (z-a)^{m(a)} h'(z)}{(z-a)^{m(a)} h(z)} = \frac{m(a)}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

wobei der zweite Summand in einer Umgebung von a holomorph ist. Somit ist $\operatorname{Res}(\phi; a) = m(a)$.
Sei $A = \{a \in \Omega_1 : f(a) = 0\}$. Dann gilt nach 2.75

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(\phi; a) = \sum_{a \in A} m(a) = N_f.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(\gamma(s))}{f(\gamma(s))} \gamma'(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_f.$$

Aus $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall\, z \in \gamma^*$, folgt : g hat keine Nullstelle auf γ^*. Wir setzen $\Gamma_0 = g \circ \gamma$ und erhalten

$$|\Gamma(s) - \Gamma_0(s)| < |\Gamma(s)| \quad , \ \forall\, s \in [0,1].$$

Nun ergibt 2.61 und der erste Teil des Beweises

$$N_f = \operatorname{Ind}_\Gamma(0) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(0) = N_g.$$

□

[8] Rouché, Eugéne (1832–1910)

Beispiel. Sei $g(z) = z^4 - 4z + 2$. Wieviele Nullstellen besitzt g in $D_1(0)$?

Auf $|z| = 1$ gilt : $|z|^4 = 1 < 2 \leq |-4z+2|$. Setze nun $f(z) = -4z+2$, dann gilt auf $|z| = 1$:

$$|f(z) - g(z)| = |-4z + 2 - z^4 + 4z - 2| = |z^4| < |-4z + 2| = |f(z)|.$$

f hat in $D_1(0)$ genau eine Nullstelle, nämlich $z_0 = 1/2$, also folgt aus 2.77, dass g ebenfalls genau eine Nullstelle in $D_1(0)$ hat.

Bemerkung. Ähnliche Aussagen kann man auch für die Anzahl der Pole einer meromorphen Funktion machen.

Beispiel 2.78. Anwendungen des Residuensatzes:

Seien P und Q Polynome mit grad $Q \geq$ grad $P + 2$. Ferner sei $Q(x) \neq 0 \;\; \forall\, x > 0$ und Q habe an der Stelle 0 eine Nullstelle der Ordnung ≤ 1. Sei $0 < \alpha < 1$ und $R = P/Q$. Wir berechnen mit Hilfe des Residuensatzes das reelle Integral

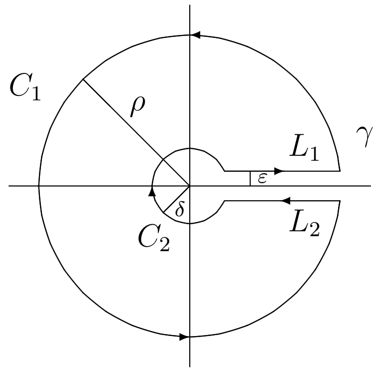
$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)\, dx,$$

dabei ist $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$.

Sei $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ω ist ein sternförmiges Gebiet (siehe Abschnitt 4). Nach 2.31 existiert daher auf Ω ein eindeutiger Ast des Logarithmus g (in diesem Fall nicht der Hauptast!) und es gilt für fixes $x > 0$:

$$\lim_{y \to 0^+} g(x + iy) = \log x \quad , \quad \lim_{y \to 0^+} g(x - iy) = \log x + 2\pi i.$$

Für $\delta, \epsilon > 0$ klein und $\rho > 0$ groß wählen wir nun folgenden geschlossenen Pfad γ in Ω :



Es folgt aus dem Residuensatz 2.75

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\alpha g(z)} R(z)\, dz = \sum_a \operatorname{Res}(f; a), \tag{2.6}$$

wobei $f(z) = e^{\alpha g(z)} R(z)$ und die Summe über alle Pole von f erstreckt wird, die im Innern von γ liegen.
Es gilt

$$|e^{\alpha g(z)}| = e^{\alpha \Re g(z)} = e^{\alpha \log |z|} = |z|^\alpha.$$

Weiters ist

$$|R(z)| \leq \frac{M}{|z|} \quad , \ M > 0$$

in einer Umgebung der Null, da Q in Null eine Nullstelle der Ordnung ≤ 1 hat. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass auf C_2^* die letzte Abschätzung gilt. Nun erhalten wir

$$\left|\int_{C_2} f(z)\, dz\right| \leq 2\pi\delta \max_{z \in C_2^*}(|z|^\alpha |R(z)|) \leq 2\pi\delta\delta^\alpha M/\delta = 2\pi M \delta^\alpha.$$

Somit ist

$$\lim_{\delta \to 0}\left|\int_{C_2} f(z)\, dz\right| = 0. \tag{2.7}$$

Andererseits ist

$$|R(z)| \leq \frac{M'}{|z|^2} \quad , \ M' > 0$$

für $|z|$ genügend groß , da grad $Q \geq$ grad $P + 2$. Somit gilt für $\rho > 0$ genügend groß :

$$\left|\int_{C_1} f(z)\, dz\right| \leq 2\pi\rho \max_{z \in C_1^*}(|z|^\alpha |R(z)|) \leq 2\pi\rho^{\alpha+1} M'/\rho^2 = 2\pi M' \rho^{\alpha-1},$$

und da $0 < \alpha < 1$, folgt

$$\lim_{\rho \to \infty}\left|\int_{C_1} f(z)\, dz\right| = 0. \tag{2.8}$$

Hält man δ und ρ fest, so strebt bei $\epsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\int_{L_1} f(z)\, dz + \int_{L_2} f(z)\, dz \to & \int_\delta^\rho e^{\alpha \log x} R(x)\, dx - \int_\delta^\rho e^{\alpha(\log x + 2\pi i)} R(x)\, dx \\ &= (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_\delta^\rho e^{\alpha \log x} R(x)\, dx.\end{aligned}$$

Man erhält daher insgesamt aus (2.7) und (2.8)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{C_1} + \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{C_2} \to (1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_0^\infty e^{\alpha \log x} R(x)\,dx,$$

wenn man zuerst $\epsilon \to 0$ und anschließend $\delta \to 0$ und $\rho \to \infty$ streben läss t.
Bei diesen Operationen ändert sich die rechte Seite von (2.6) nur insofern, als die Summe nun über alle Pole von f in Ω zu erstrecken ist. Somit folgt

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{a\in\Omega} \operatorname{Res}(f;a). \tag{2.9}$$

Sei $R(x) = 1/(1+x^2)$, nach (2.9) gilt daher

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \left[\operatorname{Res}(z^\alpha/(1+z^2); i) + \operatorname{Res}(z^\alpha/(1+z^2); -i)\right].$$

Nach 2.76 können wir die Residuen berechnen :

$$\operatorname{Res}(z^\alpha/(1+z^2); i) = \lim_{z\to i} \left[(z-i)\frac{z^\alpha}{(z+i)(z-i)}\right] = \frac{i^\alpha}{2i} = \frac{1}{2}\, e^{i(\alpha-1)\pi/2},$$

$$\operatorname{Res}(z^\alpha/(1+z^2); -i) = \lim_{z\to -i} \left[(z+i)\frac{z^\alpha}{(z+i)(z-i)}\right] = \frac{(-i)^\alpha}{-2i} = \frac{1}{2}\, e^{i(\alpha-1)3\pi/2},$$

also folgt

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}}\, \frac{1}{2} \left[e^{i(\alpha-1)\pi/2} + e^{i(\alpha-1)3\pi/2}\right] = \frac{\pi}{2}\, \frac{1}{\cos \alpha\pi/2}.$$

Beispiel 2.79. Inverse Fouriertransformation von $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$: für $t \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x}\, e^{itx}\,dx.$$

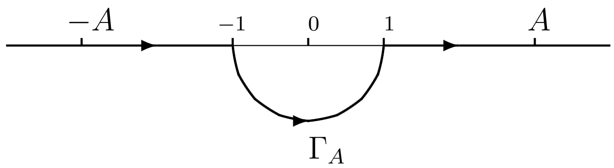
Die Funktion $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ hat an der Stelle 0 eine hebbare Singularität, also ist

$$\psi(z) = \frac{\sin z}{z}\, e^{izt} = \frac{1}{2i}\, \frac{e^{iz(1+t)} - e^{iz(-1+t)}}{z}$$

eine ganze Funktion. Daher gilt nach 2.18 (Cauchy'sche Integralsatz)

$$\int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x}\, e^{itx}\,dx = \int_{\Gamma_A} \psi(z)\,dz,$$

wobei der Pfad Γ_A wie in der Skizze verläuft.



Setze nun

$$\frac{1}{\pi}\phi_A(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} \frac{e^{isz}}{z}\,dz,$$

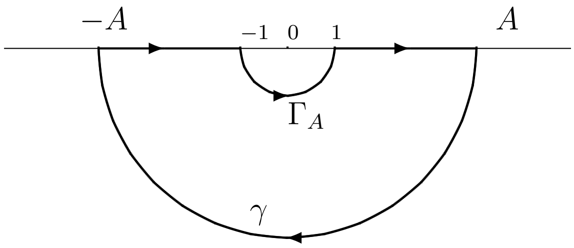
dann ist

$$\int_{-A}^{A} \frac{\sin x}{x}\, e^{itx}\,dx = \phi_A(t+1) - \phi_A(t-1).$$

Die Funktion $z \mapsto e^{isz}/z$ hat in 0 einen Pol der Ordnung 1 mit Residuum 1. Also gilt nach dem Residuensatz 2.75

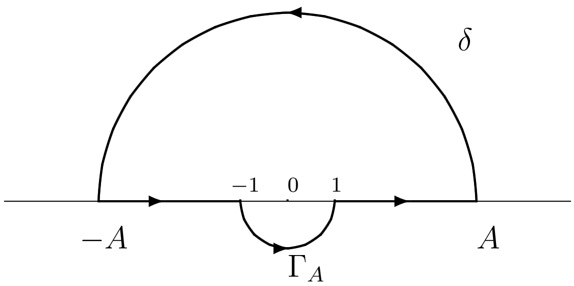
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{isz}}{z}\,dz = 0,$$

wobei γ wie in der Skizze verläuft



und

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{e^{isz}}{z}\,dz = 1.$$



Es folgt daher

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{isz}}{z}\,dz = \frac{1}{\pi}\phi_A(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{-\pi} \exp(isAe^{i\theta})\,\frac{iAe^{i\theta}}{Ae^{i\theta}}\,d\theta = 0,$$

$\Rightarrow$

(2.10) $$\frac{1}{\pi}\phi_A(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 \exp(isAe^{i\theta})\,d\theta,$$

sowie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{e^{isz}}{z}\,dz = \frac{1}{\pi}\phi_A(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \exp(isAe^{i\theta})\,d\theta = 1,$$

$\Rightarrow$

(2.11) $$\frac{1}{\pi}\phi_A(s) = 1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \exp(isAe^{i\theta})\,d\theta.$$

Wenn s und $\sin\theta$ dasselbe Vorzeichen hat, dann strebt

$$\left|\exp(isAe^{i\theta})\right| = \exp(-sA\sin\theta) \to 0$$

bei $A \to \infty$. Mit Hilfe des Satzes über die dominierte Konvergenz folgt nun aus (2.10) und (2.11)

$$\lim_{A\to\infty} \phi_A(s) = \begin{cases} \pi\ , & s > 0 \\ 0\ , & s < 0. \end{cases}$$

Aus (2.10) oder (2.11) folgt sofort $\phi_A(0) = \pi/2$.

Somit ist

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{\sin x}{x}\ e^{itx}\,dx = \lim_{A\to\infty}[\phi_A(t+1)-\phi_A(t-1)]$$

$$= \chi(t) = \begin{cases}\pi\ , & -1<t<1\\ \pi/2\ , & t=\pm 1\\ 0\ , & |t|>1\end{cases}$$

Die Fouriertransformation von χ ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)e^{-itx}\,dt = \frac{\sin x}{x}.$$

2.16. Übungen

62) Untersuche auf einfachen Zusammenhang:

$$\mathbb{C}\setminus\{0\};\mathbb{C}\setminus[0,1];\mathbb{C}\setminus\{x : x\le 0\}.$$

63) Welche der folgenden Gebiete hängen einfach zusammen ?
(1) $\mathbb{C}\setminus\{(x,y) : x=0, |y|\le 1\}\setminus\{(x,y) : x>0, y=\sin\frac{1}{x}\}$;
(2) das Komplement einer archimedischen Spirale um 0 :

$$\mathbb{C}^*\setminus\{z : z=e^{t(1+i)}, t\in\mathbb{R}\};$$

(3) $G=\{(x,y) : 0<x<1, 0<y<1\}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(x,y) : x=\frac{1}{n}, 0<y\le\frac{1}{2}\}$;
(4) $\{z : |z|<1\}\setminus\{\frac{1}{n} : n=2,3,\dots\}\setminus\{0\}$.

64) Man suche ein geeignetes Gebiet G, sowie einen Pfad in G, der zwar nullhomolog, aber nicht nullhomotop in G ist.

65) Bestimme die Laurententwicklung der Funktion

$$f(z)=\frac{(z^2-1)}{(z+2)(z+3)}$$

in
(1) $\{z : 2<|z|<3\}$;
(2) $\{z : |z|>3\}$.

66) Bestimme die Laurententwicklung der Funktion

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}\quad ,0<|a|<|b|,$$

in
(1) $\{z : |a|<|z|<|b|\}$;
(2) $\{z : |z|>b\}$.

67) Bestimme die Laurententwicklung der Funktion

$$f(z)=\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right]^{1/2}\quad ,\Im f(3/2)>0$$

im Kreisring $\{z : 1<|z|<2\}$.

68) Man bestimme die Residuen der folgenden Funktionen in den angegebenen Punkten :

$$\frac{z}{(2-3z)(4z+3)} \text{ in } \frac{2}{3}, -\frac{3}{4} \; ; \; \frac{e^{z-1}}{e^z - 1} \text{ in } 0 \; ; \; \frac{e^{i\pi z}}{16 - z^4} \text{ in } 2 \; ;$$
$$\frac{\sin z}{1 - 2\cos z} \text{ in } \frac{\pi}{3} \; ; \; \frac{\cos^2 z}{(2\pi - z)^3} \text{ in } 2\pi \; ; \; z \tan z \text{ in } \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{z+1}{(z^2+4)^2} \text{ in } 2i \; .$$

69) Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, welches bezüglich der reellen Achse symmetrisch ist, sei $f \in \mathcal{M}(G)$ und reell auf der reellen Achse und sei $z \in G$. Man zeige:

$$\overline{\mathrm{Res}(f;z)} = \mathrm{Res}(f;\overline{z}).$$

70) Man vergleiche das Residuum der Funktion f in einem einfachen Pol $z = a \neq 0$ mit dem Residuum der Funktion $zf(z^2)$ im Punkt $z = a^{1/2}$.

71) Das Residuum der Funktion f in einer isolierten Singularität im Punkt ∞ ist definiert durch

$$2\pi i \,\mathrm{Res}(f;\infty) = \int_\gamma f(z)\,dz,$$

wobei γ ein Kreis ist, welcher alle anderen Singularitäten von f enthält und negativ orientiert ist (∞ liegt daher so zu sagen links von γ).
Man beweise: ist f holomorph auf $\overline{\mathbb{C}}$ ausgenommen in isolierten Singularitäten, dann ist die Summe aller Residuen von f gleich Null.

72) Die Funktion f habe eine isolierte Singularität in ∞.
Sei ferner $g(z) = -z^{-2}f(1/z)$. Man zeige : $\mathrm{Res}(f;\infty) = \mathrm{Res}(g;0)$.

73) Man berechne die Residuen der folgenden Funktionen im Punkt ∞ :

$$f(z) = z^n \;, n \in \mathbb{Z} \; ; \; g(z) = \frac{z^2+3}{5z^4 - 7z^2 + 6z} \; ; \; h(z) = \frac{2z-3}{z^2}.$$

74) Wieviele Nullstellen hat die Funktion $f(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ in $D = \{z : |z| < 1\}$?

75) Wieviele Nullstellen hat die Funktion $g(z) = 2iz^2 + \sin z$ im Rechteck $R = \{(x,y) : |x| \leq \pi/2, |y| \leq 1\}$?

76) Man beweise : ist G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $(f_n)_n$ eine Folge holomorpher Funktionen auf G ohne Nullstellen in G, welche gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von G gegen $f \in \mathcal{H}(G)$ konvergiert, so folgt entweder $f \equiv 0$ oder f hat keine Nullstellen auf G. (Satz von Hurwitz)[9]
Hinweis : verwende den Satz von Rouché .
Welche Eigenschaften hat die Folge $f_n(z) = e^z/n$ in Bezug auf diesen Sachverhalt ?

77) Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(G)$ Limes einer Folge $f_n \in \mathcal{H}(G)$, gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von G. Man zeige, die Nullstellen von f sind Limiten von Folgen von Nullstellen der Funktionen f_n.
Man gebe ein Beispiel dafür, dass ein Häufungspunkt von Nullstellen der Funktionen f_n am Rand von G nicht unbedingt eine Nullstelle von f sein muss .

78) Sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion von zwei Veränderlichen derart, dass

$$R(\cos t, \sin t)$$

[9] Hurwitz, Adolf (1859-1919)

für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist. Man zeige :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta} R\left(\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \frac{1}{2i}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right); z\right).$$

Mit Hilfe dieser Formel berechne man die folgenden Integrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t}\ ,\ a>1; \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\sin^2 t}\ ;$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{1-2a\cos t + a^2}\, dt\ ,\ a \in \mathbb{R}\ ;\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2t}{1-2a\cos t + a^2}\, dt\ ,\ -1<a<1.$$

79) Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat; der Grad des Nenners sei größer als der Grad des Zählers. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\Im z>0} \operatorname{Res}(R(\zeta)e^{i\zeta}; z).$$

Hinweis : man wähle r_1, r_2, s positiv und so groß , dass alle in der oberen Halbebene gelegenen Pole von $R(z)$ in dem Rechteck mit dem Rand $[r_2, r_2+is, -r_1+is, -r_1, r_2]$ liegen und verwende den Residuensatz für die Integration über den Rand dieses Rechtecks. Anschließend führe man den Grenzübergang $r_1, r_2 \to \infty$ aus.
Mit Hilfe der obigen Formel berechne man die folgenden Integrale :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\, dx\ ,\ a>0\ ;\quad \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\, dx\ ,\ a,b>0.$$

80) Man berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

81) Sei α eine komplexe Zahl, $|\alpha| \neq 1$. Man berechne

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\alpha\cos\theta + \alpha^2},$$

durch Integration von $(z-\alpha)^{-1}(z-1/\alpha)^{-1}$ über den Einheitskreis.

82) Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}(G)$, seien ferner $z_1, z_2, \dots \in G$ und $\omega_0(z) \equiv 1$ sowie

$$\omega_k(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - z_j).$$

Sei γ ein doppelpunktfreier, geschlossener Pfad in G, welcher die Punkte $z_1, \dots, z_n$ in seinem Inneren enthält. Man beweise : durch

$$\mathcal{L}_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \notin \gamma^\star$$

ist ein Polynom vom Grad $n-1$ gegeben mit der Eigenschaft

$$\mathcal{L}_{n-1}(z_j) = f(z_j),\ j = 1, \dots, n.$$

Weiters zeige man durch Anwendung des Residuensatzes auf den obigen Integranden

$$\mathcal{L}_{n-1}(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(z_j)}{\omega_n'(z_j)} \frac{\omega_n(z)}{z - z_j}$$

(*Lagrange'sche Interpolation*).
Für den Restterm $R_n(z) = f(z) - \mathcal{L}_{n-1}(z)$ beweise man die Formel

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\zeta)} \, d\zeta.$$

Schließlich zeige man noch

$$\mathcal{L}_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega_{j+1}(\zeta)} \, d\zeta \right] \omega_j(z) \ , \ \ z \in G$$

(*Newton'sche Interpolation*)[10].

[10]Newton, Isaac (1643–1727)

KAPITEL 3

Analytische Fortsetzung

3.1. Reguläre und singuläre Punkte

Definition 3.1. Sei $f \in \mathcal{H}(D_R(a))$, $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Ein Punkt $z_0 \in \partial D_R(a)$ heißt regulärer Randpunkt für f, wenn ein $r > 0$ und ein $g \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$ existiert, sodass $f(z) = g(z)$, $\forall\, z \in D_R(a) \cap D_r(z_0)$.
Jene Punkte auf $\partial D_R(a)$, die nicht regulär sind, heißen singuläre Randpunkte für f.

Bemerkung. Ist z_0 ein regulärer Randpunkt für f, dann ist

$$h(z) = \begin{cases} g(z) \ , & z \in D_r(z_0) \\ f(z) \ , & z \in D_R(a) \end{cases}$$

holomorph auf $D_R(a) \cup D_r(z_0)$.

Beispiel. $f(z) = 1/(1-z)$, $f \in \mathcal{H}(D_1(0))$. Wir betrachten den Randpunkt -1 und entwickeln f um den Punkt -1 :

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(z+1)/2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\,(z+1)^n,$$

der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist 2 und daher ist $f \in \mathcal{H}(D_2(-1))$. Der Punkt -1 ist somit regulär für f.
Der Punkt 1 ist offensichtlich singulär für f.

Bemerkung. Man sieht sofort aus der Definition, dass die Menge der regulären Punkte für f eine offene Teilmenge des Randes ist, die leer sein kann. Die Menge der singulären Punkte für f ist abgeschlossen.

Beispiel 3.2. Wir geben ein Beispiel einer Funktion $f \in \mathcal{H}(D_1(0))$, welche keine regulären Randpunkte besitzt. Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist 1, daher ist $f \in \mathcal{H}(D_1(0))$. Wir betrachten nun die 2^m–ten Einheitswurzeln $\{\exp(2\pi i k/2^m) : k, m \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge liegt dicht in $\mathbb{T} = \partial D_1(0)$: für $\alpha \in [0,1]$ beliebig und vorgegebenes $\epsilon > 0$ existieren $k, m \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha - k/2^m| < \epsilon$.
Weiters ist für $0 < r < 1$

$$f(re^{2\pi i k/2^m}) = \sum_{n=0}^{m-1} r^{2^n}\ e^{(2\pi i k/2^m).2^n} + \sum_{n \geq m} r^{2^n}\ ,$$

also ist

$$\lim_{r\to 1} f(re^{2\pi ik/2^m})$$

unbeschränkt und $e^{2\pi ik/2^m}$ ein singulärer Punkt für f. Da die 2^m–ten Einheitswurzeln dicht in $\mathbb{T}$ sind und die Menge der singulären Punkte abgeschlossen ist, sind alle Punkte von $\mathbb{T}$ singulär für f.

Satz 3.3. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* 1. *Dann besitzt f mindestens einen singulären Punkt auf $\mathbb{T}$.*

Beweis. Angenommen alle Punkte in $\mathbb{T}$ sind regulär für f. Da $\mathbb{T}$ kompakt ist, existieren dann endlich viele Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_N$ mit Mittelpunkten auf $\mathbb{T}$, sodass
1) $\mathbb{T} \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} D_k$,
2) $\exists\ g_k \in \mathcal{H}(D_k)$ mit $g_k = f$ auf $D_1(0) \cap D_k$, $k = 1, \ldots, N$.
Wenn $D_k \cap D_j \neq \emptyset$, dann setze $V_{k,j} = D_k \cap D_j \cap D_1(0)$. Es gilt dann $V_{k,j} \neq \emptyset$, da die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von D_j und D_k durch $D_k \cap D_j$ geht und in $\overline{D_1(0)}$ liegt.
Auf $V_{k,j}$ gilt : $g_k = f = g_j$. Wir setzen nun

$$\Omega = D_1(0) \cup \bigcup_{k=1}^{N} D_k$$

und definieren durch

$$h(z) = \begin{cases} f(z)\ , & z \in D_1(0) \\ g_k(z)\ , & z \in D_k. \end{cases}$$

eine auf Ω holomorphe Funktion, die mit f auf $D_1(0)$ übereinstimmt. Ω ist offen und enthält $\overline{D_1(0)}$, daher existiert ein $\epsilon > 0$ mit $D_{1+\epsilon} \subseteq \Omega$. Nach 2.22 müss te nun der Konvergenzradius von f mindestens $1 + \epsilon$ sein. Widerspruch! $\square$

Korollar 3.4. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $\zeta \in \partial D_R(z_0)$ und z_1 ein Punkt auf der Verbindungsstrecke zwischen z_0 und ζ , $z_1 \neq z_0$, $z_1 \neq \zeta$. Ferner sei $\Delta = R - |z_1 - z_0|$.*
(a) *Falls*

$$\Delta = \left[\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}\right|^{1/n}\right]^{-1},$$

dann ist ζ ein singulärer Punkt für f.
(b) *Falls*

$$\Delta < \left[\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}\right|^{1/n}\right]^{-1},$$

dann ist ζ ein regulärer Punkt für f.

Beweis. (a)

$$\rho = \left[\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} \right|^{1/n} \right]^{-1}$$

ist der Konvergenzradius von f bei Entwicklung um z_1. Nach 3.3 liegt auf $\partial D_\rho(z_1)$ mindestens ein singulärer Punkt für f. Falls $\Delta = \rho$, muss ζ dieser Punkt sein.
(b) ist klar. □

3.2. Analytische Fortsetzung entlang von Wegen

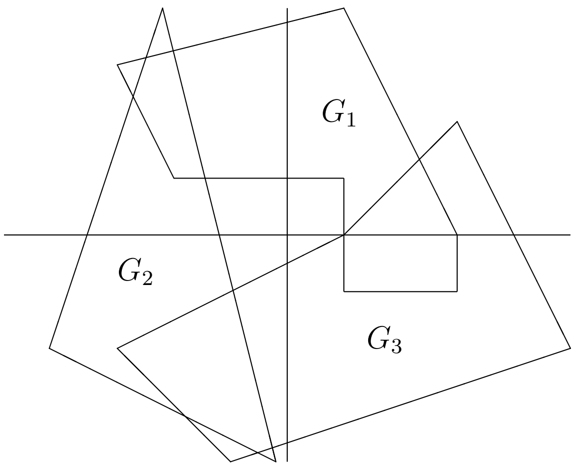
Beispiel 3.5. Sei f_1 der Hauptzweig des Logarithmus auf G_1 :

$$f_1(z) = \log|z| + i \arg\phi \ , \ z = |z|e^{i\phi} \ , \ -\pi < \phi < \pi.$$

Auf G_2 existiert ein Zweig f_2 des Logarithmus mit $f_1 = f_2$ auf $G_1 \cap G_2$, setze z.B.

$$f_2(z) = \log|z| + i \arg\phi \ , \ z = |z|e^{i\phi} \ , \ 0 < \phi < 2\pi.$$

Weiters existiert ein Zweig f_3 des Logarithmus mit $f_1 = f_3$ auf $G_1 \cap G_3$, wähle etwa $f_3 = f_1$.
Auf $G_3 \cap G_2$ gilt jedoch $f_2 = f_3 + 2\pi i$.
Ein ähnliches Verhalten zeigt auch $z^{1/k} = \exp(1/k \ \log z)$.



Definition 3.6. Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Weg zwischen z_0 und z_1, d.h. $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z_1$, sei ferner $\epsilon, \eta > 0$ und $f \in \mathcal{H}(D_\epsilon(z_0))$ sowie $g \in \mathcal{H}(D_\eta(z_1))$.
Man sagt : g entsteht durch analytische Fortsetzung von f längs γ, wenn folgendes gilt :
(1) es existiert eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und es existieren offene Umgebungen U_ν von $\gamma([t_{\nu-1}, t_\nu])$ sowie Funktionen $f_\nu \in \mathcal{H}(U_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$ mit $f_\nu = f_{\nu+1}$ auf der Zusammenhangskomponente von $\gamma(t_\nu)$ in $U_\nu \cap U_{\nu+1}$ für $\nu = 1, \ldots, n-1$;
(2) $f = f_1$ in einer Umgebung von z_0;
(3) $f_n = g$ in einer Umgebung von z_1.
Gibt es zu f und γ ein g, welches durch analytische Fortsetzung längs γ aus f entsteht, so sagt man : f ist längs γ analytisch fortsetzbar.

Bemerkung. (a) Eine holomorphe Funktion f braucht nicht entlang jedes Weges analytisch fortsetzbar sein so ist z.B. $f(z) = 1/(1-z)$ nicht entlang eines Weges fortsetzbar, der durch den Punkt 1 geht.

(b) Läss t sich f längs γ analytisch fortsetzen, so ist das Ergebnis g durch f und γ eindeutig bestimmt (also unabhängig von der Unterteilung, von den Funktionen f_ν und den Umgebungen U_ν). Dies folgt aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

(c) Das Ergebnis g hängt im allgemeinen vom Verlauf von γ ab und nicht nur allein vom Endpunkt des Weges. (siehe Beispiel 3.5)

(d) Anstelle der Umgebungen U_ν kann man Kreisscheiben K_ν wählen und zwar derart, dass der Mittelpunkt von $K_{\nu+1}$ in K_ν liegt ($\nu = 1, \dots, n-1$). Die Funktionen f_ν können nun als Potenzreihen um die Punkte $\gamma(t_\nu)$ interpretiert werden.

Beispiel 3.7. (a) Wir suchen jenen Zweig des Logarithmus, der im Punkt $z_1 = -2$ den Wert $\log 2 + (2k+1)\pi i$ annimmt ($k \in \mathbb{N}$).
Dazu beginnen wir mit dem Hauptzweig des Logarithmus in einer passenden Umgebung von $z_0 = 1$. Von z_0 ausgehend wählen wir einen Weg, der den Nullpunkt k Mal im positiven Sinn umläuft und anschließend von der oberen Halbebene in $z_1 = -2$ mündet (vgl.3.5). Dies führt zum gesuchten Zweig des Logarithmus.

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G)$. Ist $V \subseteq G$ eine konvexe Teilmenge, so besitzt f auf V eine Stammfunktion $F \in \mathcal{H}(V)$, d.h. $F' = f$ auf V.
Sei γ ein beliebiger Weg in G von z_0 nach z_1. Wir wählen eine passende Unterteilung des Parameterintervalls und als zugehörige Umgebungen Kreise D_ν. Da alle D_ν konvex sind, existiert auf jedem D_ν eine Stammfunktion F_ν von f und nach dem Identitätssatz ist $F_\nu = F_{\nu+1}$ auf $D_\nu \cap D_{\nu+1}$ für $\nu = 1, \dots, n-1$. Also können "lokale" Stammfunktionen längs jedes Weges in G analytisch fortgesetzt werden.

3.3. Der Monodromiesatz

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, inwiefern eine analytische Fortsetzung vom Verlauf des Weges zwischen zwei fixen Punkten abhängt. Dazu brauchen wir wieder den Begriff der Homotopie.

Definition 3.8. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien γ_0 , γ_1 zwei Wege in U zwischen den Punkten $z_0, z_1 \in U$.
γ_0 ist zu γ_1 homotop in U, wenn eine stetige Funktion

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$$

existiert mit folgenden Eigenschaften
(1) $H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$, $\forall\, t \in [0,1]$;
(2) $H(0,s) = z_0$, $H(1,s) = z_1$, $\forall\, s \in [0,1]$.
H heißt Homotopie von γ_0 nach γ_1.
Für fixes $s \in [0,1]$, setzt man $\gamma_s(t) = H(t,s)$, $t \in [0,1]$. γ_s ist ebenfalls ein Weg in U von z_0 nach z_1.
Ist γ_0 homotop zu γ_1 in U, so schreiben wir auch $\gamma_0 \sim_U \gamma_1$.

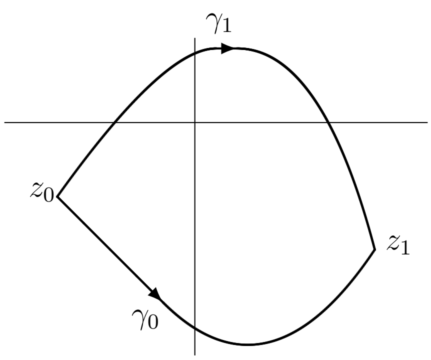
Bemerkung. $\sim_U$ ist eine Äquivalenzrelation : die Reflexivität ist klar. Ist H_0 eine Homotopie von γ_0 nach γ_1, so ist $H(t,s) = H_0(t, 1-s)$ eine Homotopie von γ_1 nach γ_0, also ist $\sim_U$ symmetrisch.
Gilt $\gamma_0 \sim_U \gamma_1$ und $\gamma_1 \sim_U \gamma_2$ mit entsprechenden Homotopien H_0 bzw. H_1, so ist durch

$$H(t,s) = \begin{cases} H_0(t, 2s) \ , & 0 \leq s \leq 1/2 \\ H_1(t, 2s-1) \ , & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von γ_0 nach γ_2 definiert, es gilt $H(t,0) = H_0(t,0) = \gamma_0(t)$ und $H(t,1) = H_1(t,1) = \gamma_2(t)$, ferner ist H stetig und verläuft ganz in U. Also ist $\gamma_0 \sim_U \gamma_2$ und $\sim_U$ ist transitiv.
Mit $[\gamma]_U = \{\delta \text{ Wege in } U : \delta \sim_U \gamma\}$ bezeichnen wir die Äquivalenzklassen.
Diese Klassen sind invariant unter Parametertransformationen : ist γ ein Weg in U und $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ bijektiv, stetig und monoton wachsend, so gilt für $\delta = \gamma \circ \phi : \ \delta \in [\gamma]_U$.
Durch $H(t,s) = \gamma((1-s)t + s\phi(t))$ ist eine Homotopie von γ nach δ gegeben : $H(t,0) = \gamma(t)$ und $H(t,1) = \gamma(\phi(t)) = \delta(t)$, weiters ist $H(0,s) = \gamma(0)$ und $H(1,s) = \gamma(1)$, $\forall \ s \in [0,1]$.

Satz 3.9 (Monodromiesatz). *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$, ferner sei $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow U$ eine Homotopie von Wegen in U mit gemeinsamen Anfangspunkt z_0 und gemeinsamen Endpunkt z_1. Sei $f \in \mathcal{H}(D_\epsilon(z_0))$, $\epsilon > 0$, wir setzen voraus, dass f längs jedes Weges $\gamma_s = H(.,s)$ analytisch fortsetzbar ist. Dann führt die Fortsetzung längs jedes Weges γ_s zur gleichen Funktion g (d.h. die Fortsetzungen g_s längs γ_s stimmen in einer Umgebung von z_1 alle überein).*

Beispiel.



Sei $U = \mathbb{C}$ und die Wege γ_0 und γ_1 zwischen z_0 und z_1 wie in der Skizze. Jede Homotopie von γ_0 nach γ_1 trifft den Nullpunkt. Der Logarithmus ist nicht fortsetzbar in eine Umgebung des Nullpunktes. Die Voraussetzungen des Monodromiesatzes sind daher für keinen Zweig des Logarithmus erfüllt. Analytische Fortsetzung längs γ_0 und längs γ_1 führt bei jedem Zweig des Logarithmus zu verschiedenen Ergebnissen (siehe 3.5).

Beweis. (a) Die Fortsetzung von f längs γ_{s_0} liefere g_{s_0}. Wir zeigen zunächst : ist s hinreichend nahe bei s_0, so liefert die Fortsetzung längs γ_s ebenfalls g_{s_0}. Wir wählen bei der Fortsetzung längs γ_{s_0} Unterteilungspunkte t_ν, entsprechende Umgebungen U_ν und holomorphe Funktionen $f_\nu \in \mathcal{H}(U_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$.
Sei $\mathcal{U} = \bigcup_{\nu=1}^n U_\nu$. $\mathcal{U}$ ist offen, da H stetig ist, ist auch $H^{-1}(\mathcal{U})$ offen in $[0,1] \times [0,1]$. $\mathcal{U}$ enthält $\gamma_{s_0}^*$ und daher ist $[0,1] \times \{s_0\} \subset H^{-1}(\mathcal{U})$. Da $H^{-1}(\mathcal{U})$ jedoch offen ist, existiert eine offene Umgebung W von s_0 in $[0,1]$ mit $[0,1] \times W \subset H^{-1}(\mathcal{U})$.
Sei V_ν die Zusammenhangskomponente von $\gamma_{s_0}(t_\nu)$ in $U_\nu \cap U_{\nu+1}$. Nach eventueller Verkleinerung von W können wir nun erreichen, dass $\gamma_s(t_\nu) \in V_\nu$, $\forall \ s \in W$, $\nu = 1, \ldots, n-1$.

Somit liefern dieselben t_ν , U_ν und f_ν für jedes $s \in W$ immer dasselbe Ergebnis g_{s_0} bei analytischer Fortsetzung von f längs γ_s.

(b) Sei g das Ergebnis der Fortsetzung von f längs γ_0 , $s = 0$. Sei

$$J = \{s \in [0,1] : \text{Fortsetzung von } f \text{ längs } \gamma_\sigma \text{ ergibt } g \text{ für } 0 \le \sigma \le s\}.$$

Nach (a) ist J offen in $[0,1]$ und $0 \in J$. Angenommen $J \neq [0,1]$, dann ist $\sup J = s_0 \notin J$ denn sonst bekämen wir einen Widerspruch zur Offenheit von J. Nun wenden den Schritt (a) auf dieses s_0 an und erhalten einen Widerspruch zur Aussage, dass s_0 das Supremum von J ist. Somit muss $J = [0,1]$ sein. □

Satz 3.10. *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$. Sei $z_0 \in G$, $f \in \mathcal{H}(D_\epsilon(z_0))$. f sei längs jedes Weges in G mit Anfangspunkt z_0 analytisch fortsetzbar. Dann existiert ein $F \in \mathcal{H}(G)$ mit $f = F$ auf $D_\epsilon(z_0)$.*

Beweis. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet sind je zwei Wege γ_0 und γ_1 mit gleichem Anfangs– und Endpunkt homotop (siehe 2.60). $\gamma = \gamma_0 - \gamma_1$ ist eine geschlossene Kurve, die zur Punktkurve über die Homotopie H homotop ist. Aus H konstruiert man leicht eine Homotopie H_0 von γ_0 nach γ_1. (siehe auch Übungen)
Sei nun $z \in G$ und γ_z ein Weg in G von z_0 nach z. Mit g_z bezeichnen wir das Ergebnis der Fortsetzung von f längs γ_z. Die Funktion g_z ist holomorph in einer Umgebung $U(z) \subset G$ von z. Nach 3.9 hängt g_z nicht von γ_z ab.
Sei $F(w) = g_z(w)$ für $w \in U(z)$. Um zu zeigen, dass $F \in \mathcal{H}(G)$, genügt es die folgende Behauptung zu beweisen : ist $z_1 \neq z_2$ und $U(z_1) \cap U(z_2) \neq \emptyset$, so gilt $g_{z_1} = g_{z_2}$ auf $U(z_1) \cap U(z_2)$. Sei dazu $z_* \in U(z_1) \cap U(z_2)$. Dann erhalten wir g_{z_*} durch analytische Fortsetzung längs des Weges $\gamma_{z_1} + [z_1, z_*]$, also auch durch analytische Fortsetzung von g_{z_1} längs der in $U(z_1)$ verlaufenden Strecke $[z_1, z_*]$. Nach dem Identitätssatz gilt $g_{z_1} = g_{z_*}$ auf $U(z_1) \cap U(z_*)$. Ebenso erhalten wir $g_{z_*} = g_{z_2}$ auf $U(z_*) \cap U(z_2)$ und daher ist $g_{z_1} = g_{z_2}$ auf $U(z_1) \cap U(z_2)$. □

Bemerkung. Mit Hilfe des letzten Satzes ist es möglich aus lokal definierten holomorphen Funktionen (man sagt auch : aus Keimen holomorpher Funktionen) global holomorphe Funktionen zu konstruieren.
So kann man z.B. den Hauptzweig des Logarithmus in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet G, welches den Nullpunkt nicht enthält, zu einer global holomorphen Funktion $F \in \mathcal{H}(G)$ fortsetzen.
Ist G hingegen ein Kreisring um den Nullpunkt, so existiert keine solche global holomorphe Funktion, die von einem Zweig des Logarithmus aus analytischer Fortsetzung hervorgeht.

3.4. Übungen

83) Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1, wobei alle Koeffizienten a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Man beweise, $z = 1$ ist ein singulärer Punkt für f.
Hinweis: man gehe indirekt vor und verwende das Regularitätskriterium aus der Vorlesung.

84) Sei f die Einschränkung des Hauptzweiges der Funktion $\sqrt{z}$ auf den Kreis $D_1(1)$. Man ermittle die analytischen Fortsetzungen von f entlang der Wege $\gamma(t) = \exp(2\pi it)$ und $\sigma(t) = \exp(4\pi it)$, für $0 \leq t \leq 1$.

85) Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$. Man zeige : je zwei Wege mit gemeinsamem Anfangspunkt und gemeinsamem Endpunkt sind homotop in G.

86) Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $w \notin \Omega$ fix gewählt. Sei ferner D eine Kreischeibe in Ω. Man zeige : es existiert ein $f \in \mathcal{H}(D)$ mit $\exp[f(z)] = z - w$ und $f'(z) = (z - w)^{-1}$ in D. Weiters beweise man, dass sich f' entlang jedes Weges in Ω, welcher im Mittelpunkt von D beginnt, analytisch fortsetzen läss t und leite daraus ab, dass die Voraussetzung des einfachen Zusammenhanges in Satz 3.10 notwendig ist.

KAPITEL 4

Konstruktion und Approximation holomorpher Funktionen

In diesem Kapitel behandeln wir die Frage, auf welchen Gebieten $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen durch Polynome, bzw. durch Funktionen, die auf größeren Gebieten als G holomorph sind, approximiert werden können (Runge'sche Approximationssatz). Weiters konstruieren wir holomorphe Funktionen, die in vorgegebenen Punkten Nullstellen einer vorgegebenen Ordnung besitzen (Weierstraß'sche Produktsatz). Analog beweisen wir die Existenz von meromorphen Funktionen mit vorgegebenen Hauptteilen (Satz von Mittag–Leffler). Bei diesen drei Problemen spielt die Lösung der inhomogenen Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichung eine zentrale Rolle. Wir beginnen daher mit der Behandlung dieser Fragestellung. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Methode in der komplexen Analysis mehrerer Veränderlicher von besonderer Bedeutung ist.
Anschließend zeigen wir die Existenz biholomorpher Abbildung von einfach zusammenhängenden Gebieten $G \neq \mathbb{C}$ auf den Einheitskreis $D_1(0)$ (Riemann'sche Abbildungssatz). Damit können wir schließlich einfach zusammenhängende Gebiete charakterisieren, und zwar durch verschiedene Eigenschaften holomorpher Funktionen auf diesen Gebieten.

4.1. Die Zerlegung der Eins

Definition 4.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von Ω, d.h. $\Omega \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, U_i offen. Eine <u>$\mathcal{C}^\infty$–Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$</u> ist eine Familie $\{\Phi_i : i \in I\}$ von $\mathcal{C}^\infty$–Funktionen $\Phi_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\Phi_i \geq 0$ auf Ω und der Träger von Φ_i
$$\mathrm{Tr}(\Phi_i) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \Phi_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i \ , \ \forall\, i \in I;$$
(2) $\{\mathrm{Tr}(\Phi_i) : i \in I\}$ ist lokal endlich, d.h. für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ ist die Menge $\{i \in I : \mathrm{Tr}(\Phi_i) \cap K \neq \emptyset\}$ endlich.
(3) $\sum_{i\in I} \Phi_i \equiv 1$ auf Ω (die Summe ist nach (2) $\forall\, x \in \Omega$ endlich).

Lemma 4.2. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert ein $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ (Φ hat kompakten Träger) mit $\Phi(x) > 0$, $\forall\, x \in K$.*

Beweis. Sei
$$\psi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t}\right) \ , & t < 1 \\ 0 \ , & t \geq 1. \end{cases}$$
Dann ist $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Wir setzen nun
$$\chi(x_1, \dots, x_n) = \psi((x_1^2 + \cdots + x_n^2)/2),$$
dann ist $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Tr $\chi \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 2\}$, und $\chi(0) > 0$.

Sei $\delta > 0$ so gewählt, dass $\delta < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$. Für ein beliebiges $a \in K$ definieren wir $\Phi_a(x) = \chi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)$. Dann gilt $\Phi_a \in \mathcal{C}_0^\infty$ und $\Phi_a(a) = \chi(0) > 0$ sowie Tr $\Phi_a \subseteq \Omega$.
Wir definieren $V_a = \{x \in \Omega : \Phi_a(x) > 0\}$. Die Mengen V_a sind offen und weil $\Phi_a(a) > 0$, $\forall\, a \in K$, gilt

$$K \subset \bigcup_{a \in K} V_a.$$

Da K kompakt ist, existieren endlich viele $a_1, \ldots, a_p \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} V_{a_j}$$

und wir setzen $\Phi = \Phi_{a_1} + \ldots \Phi_{a_p}$, dann ist $\Phi(x) > 0$, $\forall\, x \in K$. □

Lemma 4.3. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von Ω. Dann existiert eine $\mathcal{C}^\infty$–Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}$.*

Beweis. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist parakompakt, d.h. $\mathcal{U}$ besitzt eine lokalendliche Verfeinerungsüberdeckung, das ist eine lokalendliche offene Überdeckung $\{V_j : j \in J\}$ von Ω mit folgender Eigenschaft : $\forall\, j \in J\ \exists i \in I$ mit $V_j \subseteq U_i$, also existiert eine Abbildung $\tau : J \longrightarrow I$ mit $V_j \subseteq U_{\tau(j)}$.
Weiters existieren kompakte Mengen $K_j \subset V_j$ mit $\bigcup_{j \in J} K_j = \Omega$ (siehe Topologie).
Nach 4.2 existieren $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(V_j)$ mit $\psi_j(x) > 0$, $\forall\, x \in K_j$. Setze nun

$$\psi = \sum_{j \in J} \psi_j.$$

Da $\{V_j : j \in J\}$ lokalendlich ist, ist die obige Summe immer endlich und daher ist $\psi \in \mathcal{C}^\infty$.
Ferner ist $\psi > 0$ auf Ω, weil $\psi_j > 0$ auf K_j und $\bigcup_{j \in J} K_j = \Omega$.
Sei $\chi_j = \psi_j / \psi$. Die Familie $\{\chi_j : j \in J\}$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$–Zerlegung der Eins bezüglich $\{V_j : j \in J\}$, denn es gilt

$$\sum_{j \in J} \chi_j = \sum_{j \in J} \frac{\psi_j}{\psi} = \frac{1}{\psi} \sum_{j \in J} \psi_j = 1.$$

Für ein $i \in I$ setze $J_i = \tau^{-1}(\{i\})$ und definiere $\Phi_i = \sum_{j \in J_i} \chi_j$. Dann ist $\{\Phi_i : i \in I\}$ die gesuchte $\mathcal{C}^\infty$–Zerlegung der Eins bezüglich der ursprünglichen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$. □

Satz 4.4. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, weiters X abgeschlossen, U offen mit $X \subset U \subset \Omega$. Dann existiert ein $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \Phi \leq 1$ sowie $\Phi|_X = 1$ und $\Phi|_{\Omega \setminus U} = 0$.*

Beweis. Sei $V = \Omega \setminus X$. Dann ist V offen und $\{U, V\}$ eine offene Überdeckung von Ω. Nach 4.3 existiert eine dazugehörige $\mathcal{C}^\infty$–Zerlegung der Eins, wir bezeichnen sie mit $\{\Phi_U, \Phi_V\}$. Dann gilt $\Phi_U + \Phi_V = 1$ auf Ω und Tr $\Phi_U \subseteq U$, Tr $\Phi_V \subseteq V$.
Setze nun $\Phi = \Phi_U$. Dann ist $\Phi = 0$ außerhalb von U und da $\Phi_V = 0$ außerhalb von V ist , muss dort $\Phi_U = 1$ sein. □

Satz 4.5. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, weiters seien X_1 und X_2 zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von Ω. Ferner seien $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Dann existiert ein $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mit*

$$\Phi|_{X_1} = \Phi_1|_{X_1} \quad \text{und} \quad \Phi|_{X_2} = \Phi_2|_{X_2} .$$

Beweis. Nach 4.4 existiert ein $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mit $0 \le \alpha \le 1$ und $\alpha|_{X_1} = 1$ sowie $\alpha|_{X_2} = 0$. Setze nun $\Phi = \alpha\Phi_1 + (1-\alpha)\Phi_2$. Dann hat Φ die gewünschten Eigenschaften. □

4.2. Die inhomogene Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichung

Satz 4.6. *Sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ mit stückweise glattem Rand und sei f reell stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\overline{G}$. Dann ist*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \quad , \; z \in G$$

eine auf G stetig differenzierbare Funktion und es gilt auf G

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = f,$$

u ist also eine Lösung der inhomogenen Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichung mit rechter Seite f.

Bemerkung. Zum Beweis werden wir die inhomogene Cauchy'sche Integralformel 2.56 verwenden.
Angenommen u ist stetig differenzierbar auf G und eine Lösung von $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = f$, dann erhalten wir aus 2.56

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

wobei wir den Rand von G positiv orientieren und feststellen können, dass der erste Summand eine in z holomorphe Funktion auf G darstellt. Differentiation nach $\overline{z}$ liefert nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\right) d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[\int_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[\int_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\right].\end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt, dass der Ansatz

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

sinnvoll ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass u auf G stetig differenzierbar ist. Sei $z_0 \in G$ beliebig und $r > 0$ derart, dass $D_{2r}(z_0) \subset\subset G$. Nach 4.4 existiert ein $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ mit $\phi(z) = 1$ für $z \in \overline{D_r(z_0)}$ und $\phi(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus D_{2r}(z_0)$. Nun zerlegen wir u wie folgt in zwei Summanden

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\phi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{(1-\phi(\zeta))f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = u_1(z) + u_2(z).$$

Sei $z \in D_{r/2}(z_0)$. Da $1 - \phi(\zeta) = 0$ für $\zeta \in D_r(z_0)$, gilt
$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{G \setminus D_r(z_0)} \frac{(1-\phi(\zeta))f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$
der Integrand ist auf $G \setminus D_r(z_0)$ stetig differenzierbar, wir können daher Integration und Differentiation nach $\overline{z}$ vertauschen und erhalten
$$\frac{\partial u_2}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{G \setminus D_r(z_0)} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{(1-\phi(\zeta))f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = 0,$$
also ist u_2 auf $D_{r/2}(z_0)$ sogar holomorph.
Bei u_1 wird anders argumentiert : es gilt $\phi f \equiv 0$ auf $G \setminus D_{2r}(z_0)$, wenn wir daher f auf ganz $\mathbb{C}$ beliebig fortsetzen, bleibt die letzte Aussage noch immer gleich und wir können für u_1 schreiben
$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$
Wir substituieren für $\zeta = z + w$ und erhalten
$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(z+w)f(z+w)}{w} \, dw \wedge d\overline{w}.$$
Nun hängt der Integrand stetig differenzierbar von z bzw. $\overline{z}$ ab; alle seine Ableitungen nach z und $\overline{z}$ sind gleichmäßig durch integrierbare Funktionen von w beschränkt (siehe [**8**], Seite 146, siehe auch Beweis von 2.56). Man kann daher Integration und Differentiation nach z und $\overline{z}$ miteinander vertauschen. Somit ist u_1 stetig differenzierbar, also auch $u = u_1 + u_2$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass u Lösung der inhomogenen Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichung ist. Sei $z \in D_{r/2}(z_0)$. Dann folgt aus dem ersten Teil des Beweises
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial u_1}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\int_G \frac{\phi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(z+w)f(z+w)}{w} \, dw \wedge d\overline{w} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\frac{\phi(z+w)f(z+w)}{w} \right] dw \wedge d\overline{w}.
\end{aligned}$$
Nun gilt für eine differenzierbare Funktion h :
$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}(z+w) = \frac{\partial h}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta),$$
wobei $\zeta = z + w$. Setze dafür $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$, dann ist
$$\frac{\partial h}{\partial x}(z+w) = \lim_{t \in \mathbb{R}, t \to 0} \frac{h(z+w+t) - h(z+w)}{t}$$
und daher
$$\frac{\partial h}{\partial \xi}(\zeta) = \lim_{t \in \mathbb{R}, t \to 0} \frac{h(\zeta + t) - h(\zeta)}{t};$$
analoge Ausdrücke folgen für die Ableitung nach η.
Jetzt können wir in der Berechnung von $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z)$ fortsetzen
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left[\frac{\phi(z+w)f(z+w)}{w} \right] dw \wedge d\overline{w} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial / \partial \overline{\zeta} [\phi(\zeta) f(\zeta)]}{\zeta - z} \, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Wir verwenden 2.56 für ϕf und für einen Kreis D mit $D_{2r}(z_0) \subset\subset D$. Da $\phi f = 0$ auf ∂D, folgt für $z \in D_{r/2}(z_0)$

$$\begin{aligned} f(z) = \phi(z)f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\phi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial/\partial\overline{\zeta}[\phi(\zeta)f(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial/\partial\overline{\zeta}[\phi(\zeta)f(\zeta)]}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) \quad \text{wegen (4.1)} \end{aligned}$$

□

Korollar 4.7. *(a) Ist $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$ und*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

dann ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ und $\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = f$ auf $\mathbb{C}$.

(b) Ist $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$, dann gilt auf $\mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f/\partial\overline{\zeta}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Beide Aussagen folgen unmittelbar aus dem Beweis von 4.6

Satz 4.8 (Variante des Cauchy'schen Integralsatzes). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(G)$, sowie K eine kompakte Teilmenge von G. Sei $\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$ mit $\alpha = 1$ auf K (siehe Abschnitt 1.). Dann gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{\zeta}}\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \quad , \quad \forall\ z \in K.$$

Beweis. Sei

$$\Phi(z) = \begin{cases} f(z)\alpha(z)\ , & z \in G \\ 0\ , & z \notin G. \end{cases}$$

Dann ist $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$. Nun existiert nach 2.66 eine offene Teilmenge $G_1 \subset G$, sodass $\operatorname{Tr}(\alpha) \subset G_1$ und ∂G_1 stückweise glatt ist. Dann ergibt 2.56

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_1} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{G_1} \frac{\partial\Phi/\partial\overline{\zeta}}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Nun gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{\zeta}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{\zeta}} f = \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{\zeta}} f,$$

da f holomorph ist. Somit folgt für $z \in K$

$$\begin{aligned} f(z) = \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_1} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{G_1} \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{\zeta}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\partial \alpha}{\partial \overline{\zeta}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \end{aligned}$$

der erste Summand verschwindet, da $\partial G_1 \subset (\operatorname{Tr}(\alpha))^c$.

□

4.3. Der Runge'sche Approximationssatz

Ist $f \in \mathcal{H}(D_R(z_0))$, so läss t sich f gleichmäßig auf kompakten Mengen durch Polynome approximieren (Taylorentwicklung).
Wir werden die Frage der Approximierbarkeit durch Polynome nun für holomorphe Funktionen auf allgemeinen Gebieten behandeln.

Satz 4.9 (Satz von Runge). [1]
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent :
(a) Jede Funktion f, welche holomorph auf einer Umgebung von K ist, läss t sich gleichmäßig auf K durch Funktionen in $\mathcal{H}(\Omega)$ approximieren (d.h. $\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $|f-g|_K < \epsilon$);
(b) Die offene Menge $\Omega \setminus K$ hat keine Zusammenhangskomponente, die relativ kompakt in Ω ist (d.h. es gibt keine Zusammenhangskomponente O von $\Omega \setminus K$, die beschränkt ist und $\overline{O} \subset \Omega$);
(c) $\forall\ z \in \Omega \setminus K\ \ \exists\ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit

$$\sup_{w \in K} |f(w)| = |f|_K < |f(z)|, \tag{4.2}$$

ein solches f nennt man eine "peaking function".

Korollar 4.10. *Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent :*
(a) Jede Funktion, die in einer Umgebung von K holomorph ist, läss t sich gleichmäßig auf K durch Polynome approximieren;
(b) $\mathbb{C} \setminus K$ ist zusammenhängend.

Dies folgt sofort aus 4.9, wenn man für $\Omega = \mathbb{C}$ setzt.

Bemerkung. Es gilt sogar der folgende Satz von Mergelyan: ist $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend, so kann jede Funktion in $A(K)$ gleichmäßig auf K durch Polynome approximiert werden, dabei ist

$$A(K) = \{f \in \mathcal{C}(K) : f \text{ holomorph auf } \overset{\circ}{K}\}.$$

Beweis von 4.9. (c) $\Rightarrow$ (b) Wir verwenden das Maximumprinzip. Angenommen (b) gilt nicht, dann existiert eine Zusammenhangskomponente O von $\Omega \setminus K$, sodass $\overline{O}$ kompakt ist und $\overline{O} \subset \Omega$. Wir behaupten daraus folgt : $\partial O \subset K$. Angenommen $\exists\ a \in \partial O$ mit $a \notin K$, dann ist wegen $\overline{O} \subset \Omega$ auch $a \notin \partial\Omega$. Somit liegt a in der offenen Menge $\Omega \setminus K$, also existiert ein $r > 0$ mit $D_r(a) \subset \Omega \setminus K$. Da $a \in \overline{O}$, ist $D_r(a) \cap O \neq \emptyset$ und daher ist $D_r(a) \cup O \subset \Omega \setminus K$ zusammenhängend, und somit eine größere zusammenhängende Teilmenge von $\Omega \setminus K$ als O. Widerspruch!
Also ist $\partial O \subset K$. Wir verwenden nun das Maximumprinzip 2.40. Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ beliebig. Dann ist

$$\sup_{z \in \overline{O}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial O} |f(z)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)|,$$

was ein Widerspruch zu (c) ist.

[1] Runge,Carl David Tolmé (1856–1927)

(a) $\Rightarrow$ (b) : angenommen (b) gilt nicht, dann existiert eine relativ kompakte Zusammenhangskomponente O von $\Omega \setminus K$ und es gilt $\partial O \subset K$ (siehe voriger Beweisschritt). Also ist nach dem Maximumprinzip

$$\sup_{z\in\overline{O}} |f(z)| \leq \sup_{z\in K} |f(z)| \quad , \ \forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega). \tag{4.3}$$

Sei $\zeta \in O$ und $f(z) = 1/(z-\zeta)$. Dann ist f holomorph in einer Umgebung von K. Nach Aussage (a) existiert daher eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $|f_n - f|_K \to 0$ bei $n \to \infty$. Also ist auch

$$\sup_{z\in K} |f_n(z)(z-\zeta) - 1| \to 0 \quad , \text{ bei } \ n \to \infty. \tag{4.4}$$

Andererseits gilt jedoch

$$|f_n - f_m|_K < \epsilon \quad , \ \forall\ n, m > N_\epsilon,$$

und nach (4.3) daher

$$\sup_{z\in\overline{O}} |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \quad , \ \forall\ n, m > N_\epsilon.$$

Nach 2.43 existiert ein $F \in \mathcal{H}(O)$, das auf $\overline{O}$ stetig ist, mit $f_n \to F$ gleichmäßig auf $\overline{O}$. Die Aussage (4.4) ergibt daher

$$F(z)(z-\zeta) = 1 \quad , \ \forall\ z \in O,$$

wählt man für $z = \zeta$, so würde folgen $0 = 1$. Widerspruch!

(b) $\Rightarrow$ (a) : Sei $K \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge und $\mathcal{C}(K)$ der Raum aller stetigen Funktionen $\psi : K \longrightarrow \mathbb{C}$, versehen mit der Norm $\|\psi\| = \sup_{z\in K} |\psi(z)|$. $\mathcal{C}(K)$ ist ein Banachraum.
Sei $L \in \mathcal{C}(K)'$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{C}(K)$ mit $L(f) = 0 \ \ ,\forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Wir zeigen : dann ist auch $L(g) = 0$, für jede Funktion g, die in einer Umgebung von K holomorph ist. Nach dem Satz von Hahn–Banach [2] ist diese Aussage äquivalent zu (a) (siehe Anhang).
Es sei also $L \in \mathcal{C}(K)'$ und $L(f) = 0 \ \ ,\forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Für $\zeta \in \mathbb{C}\setminus K$ sei $f_\zeta(z) = 1/(z-\zeta)$. Dann ist $f_\zeta \in \mathcal{C}(K)$, f ist sogar holomorph in einer Umgebung von K. Wir definieren $\phi(\zeta) = L(f_\zeta)$. Wir beweisen : $\phi \equiv 0$ auf $\mathbb{C} \setminus K$.
Zunächst zeigen wir $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K)$. Dazu betrachten wir

$$\frac{\phi(\zeta_1) - \phi(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} = \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}\ [L(f_{\zeta_1}) - L(f_{\zeta_2})] = \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}\ L(f_{\zeta_1} - f_{\zeta_2}). \tag{4.5}$$

Es gilt

$$f_{\zeta_1}(z) - f_{\zeta_2}(z) = \frac{1}{z-\zeta_1} - \frac{1}{z-\zeta_2} = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)}.$$

Für $F_{\zeta_1,\zeta_2}(z) = 1/[(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)]$ folgt daher aus (4.5)

$$\frac{\phi(\zeta_1) - \phi(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} = \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}\ L((\zeta_1 - \zeta_2)F_{\zeta_1,\zeta_2}) = L(F_{\zeta_1,\zeta_2}),$$

wobei zunächst nur die Linearität von L verwendet wurde. Bei $\zeta_1 \to \zeta_2$ geht $F_{\zeta_1,\zeta_2} \to F_{\zeta_2,\zeta_2}$ gleichmäßig auf K, dabei ist $F_{\zeta_2,\zeta_2}(z) = 1/(z-\zeta_2)^2$. Nun ergibt die Stetigkeit von L

$$\exists \lim_{\zeta_1\to\zeta_2} \frac{\phi(\zeta_1) - \phi(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} = L(F_{\zeta_2,\zeta_2}),$$

[2] Hahn, Hans (1870–1937), Banach, Stefan (1892–1945)

also ist $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K)$. Analog zeigt man für die höheren Ableitungen von ϕ

$$\phi^{(k)}(\zeta) = k!L\left(z \mapsto \frac{1}{(z-\zeta)^{k+1}}\right).$$

Ist nun $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, dann ist die Funktion $z \mapsto (z-\zeta)^{-(n+1)}$ holomorh auf Ω; daher ist nach Voraussetzung $L(z \mapsto (z-\zeta)^{-(n+1)}) = 0$, d.h.

$$\phi^{(k)}(\zeta) = 0 \quad , \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

also ist $\phi = 0$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$, welche mit $\mathbb{C} \setminus \Omega$ einen nichtleeren Durchschnitt hat.
Weiters ist nach Voraussetzung $L(z \mapsto z^n) = 0 \quad , \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, ist nun $|\zeta| > \sup_{z\in K} |z|$, so konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

gleichmäßig auf K und daher gilt

$$\phi(\zeta) = L(z \mapsto 1/(z-\zeta)) = L\left(z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L(z \mapsto z^n) = 0$$

also ist $\phi = 0$ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$.
Wir wissen somit bis jetzt : $\phi = 0$ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\setminus K$ und auf allen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\setminus K$, die mit $\mathbb{C}\setminus\Omega$ einen nichtleeren Durchschnitt haben.
Sei U eine beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\setminus K$ mit $U\cap(\mathbb{C}\setminus\Omega) = \emptyset$. Dann ist $U \subseteq \Omega$ und auch $U \subseteq \Omega \setminus K$. Weiters wissen wir aus dem Beweis von (c) $\Rightarrow$ (b), angewandt auf den Fall $\Omega = \mathbb{C}$, dass $\partial U \subseteq K$. Daher ist $\overline{U} \subseteq \Omega$, was der Voraussetzung (b) widerspricht, also gibt es keine solche Zusammenhangskomponente U.
Daher ist $\phi = 0$ auf ganz $\mathbb{C} \setminus K$.
Sei nun g holomorph in einer Umgebung $\omega \supset K$, z.z. : $L(g) = 0$. Wir wählen eine kompakte Menge K_1, sodass $\omega \supset K_1 \supset K$. Nach 4.8 existiert ein $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega)$ mit $\psi = 1$ auf K_1 und

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\omega \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\ \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} \quad , \quad \forall\, z \in K, \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega\setminus K_1} \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\ \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}\ , \end{aligned}$$

weil auf $K_1 : \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}} = 0$. Wir werden jetzt das Funktional L auf diese Formel anwenden.
Das Integral

$$\int_{\omega\setminus K_1} \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\ \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

kann als Limes geschrieben werden :

$$\lim \sum_\nu \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta_\nu)\ \frac{g(\zeta_\nu)}{\zeta_\nu - z}\ m(R_\nu),$$

wobei R_ν Rechtecke sind, die $\omega \setminus K_1$ überdecken, $\zeta_\nu \in R_\nu$ und wobei $m(R_\nu)$ das Maß von R_ν ist. Beim Grenzübergang läss t man die Durchmesser der R_ν gegen Null streben, außerdem geschieht der Grenzübergang gleichmäßig für alle $z \in K$. Wegen der Stetigkeit von L kann man diesen Limes mit der Anwendung von L vertauschen und erhält

$$\begin{aligned} L(g) &= L\left(z \mapsto \int_{\omega\setminus K_1} \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\ \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}\right) \\ &= \int_{\omega\setminus K_1} \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta)\ g(\zeta)\ L\left(z \mapsto \frac{1}{\zeta - z}\right)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = 0, \end{aligned}$$

da $\phi(\zeta) = L(f_\zeta) = 0\ ,\ \forall\ \zeta \in \mathbb{C} \setminus K$.

Wir haben somit bisher gezeigt : (c) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (a) und es bleibt noch
(b) $\Rightarrow$ (c) :
sei $z \in \Omega \setminus K$, z.z.: $\exists\ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $|f|_K < |f(z)|$.
Wir wählen eine Kreisscheibe D um z mit $\overline{D} \subset \Omega \setminus K$. Die Zusammenhangskomponenten von $\Omega \setminus (K \cup \overline{D})$ stimmen mit den Zusammenhangskomponenten von $\Omega \setminus K$ überein, bis auf jene, in welcher $\overline{D}$ entfernt wurde. Da wir hier (b) voraussetzen, existiert in $\Omega \setminus K$ keine Zusammenhangskomponente, die relativ kompakt in Ω ist; mit anderen Worten : alle Zusammenhangskomponenten von $\Omega \setminus K$ kommen $\partial\Omega$ beliebig nahe. Diese Eigenschaft gilt daher auch für die Zusammenhangskomponenten von $\Omega \setminus (K \cup \overline{D})$, d.h. nimmt man an Stelle von K die kompakte Menge $K \cup \overline{D}$, so ist die Bedingung (b) ebenfalls erfüllt. Wir verwenden nun den Schluss (b) $\Rightarrow$ (a) für die kompakte Menge $K \cup \overline{D} \subset \Omega$: es gilt $K \cap \overline{D} = \emptyset$, da $\overline{D} \subset \Omega \setminus K$, sei nun $g = 0$ in einer Umgebung von K und $g = 1$ in einer Umgebung von $\overline{D}$, dabei seien die Umgebungen so gewählt, dass sie leeren Durchschnitt haben. Dann ist g holomorph in einer Umgebung von $K \cup \overline{D}$. Nach (a) existiert somit ein $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $|f| = |f - g| < 1/2$ auf K und $|f - 1| = |f - g| < 1/2$ auf $\overline{D}$. Ist nun $z \in \overline{D}$, dann gilt

$$|f(z)| \geq 1 - |f(z) - 1| > 1 - 1/2 = 1/2 > |f|_K.$$

□

Definition 4.11. Sei Ω offen in $\mathbb{C}$ und $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge.

$$\hat{K}_\Omega := \{z \in \Omega : |f(z)| \leq |f|_K\ \forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega)\}$$

ist die holomorph konvexe Hülle von K (in Bezug auf Ω).

Bemerkung 4.12. (a) Durch die holomorph konvexe Hülle werden in gewisser Weise die "Löcher " von K gestopft. (Maximumprinzip!)

(b) Es gilt

$$\operatorname{dist}(K, \Omega^c) = \operatorname{dist}(\hat{K}_\Omega, \Omega^c).$$

Da $K \subseteq \hat{K}_\Omega$, folgt $\operatorname{dist}(K, \Omega^c) \geq \operatorname{dist}(\hat{K}_\Omega, \Omega^c)$. Für die Umkehrung dieser Ungleichung betrachten wir die Funktion $f(z) = 1/(z - \zeta)\ ,\ \zeta \in \Omega^c$.
Ist $z \in \hat{K}_\Omega$, dann ist, weil $f \in \mathcal{H}(\Omega)$,

$$\frac{1}{|z - \zeta|} \leq \sup_{w \in K} \left|\frac{1}{w - \zeta}\right| = (\inf_{w \in K} |w - \zeta|)^{-1},$$

also ist $\inf_{w \in K} |w - \zeta| \leq |z - \zeta|$. Daher gilt

$$\operatorname{dist}(K, \Omega^c) \leq \operatorname{dist}(\hat{K}_\Omega, \Omega^c).$$

(c) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten in M auch die gesamte Verbindungsstrecke zwischen den Punkten in M liegt. Äquivalent dazu ist die Bedingung : für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ existiert eine Gerade $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : l((x,y)) = ax + by + c = 0\}$ mit $(x_0, y_0) \in g$ und $M \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : l((x,y)) < 0\}$. (Trennungseigenschaft)
Die konvexe Hülle $\tilde{K}$ von K ist die kleinste konvexe Menge, welche K enthält. Man überlegt sich leicht (siehe Übungen), dass

$$\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C} : |e^{\alpha z}| \leq \sup_{w \in K} |e^{\alpha w}| \ , \ \forall \ \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Da die Funktionen $z \mapsto e^{\alpha z}$ holomorph auf Ω sind, folgt

$$\hat{K}_\Omega \subseteq \tilde{K},$$

daher die Bezeichnung "holomorph konvex " .

(d) Aus der Definition folgt sofort : $(\hat{K}_\Omega)\hat{}_\Omega = \hat{K}_\Omega$.
(e) Ebenso folgt : $\hat{K}_\Omega$ ist beschränkt (da $|w| \leq C, \ \forall \ w \in K \ , \ C > 0$, gilt für die auf Ω holomorphe Funktion $f(z) = z : |z| = |f(z)| \leq |f|_K \leq C$ und somit ist auch $|z| \leq C \ , \ \forall \ z \in \hat{K}_\Omega$).
Weiters ist $\hat{K}_\Omega$ abgeschlossen in Ω : ist $z \in \Omega \setminus \hat{K}_\Omega$, dann existiert ein $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $|f(z)| > |f|_K$, da $|f|$ stetig ist, gilt diese Ungleichung sogar auf einer ganzen Umgebung $U(z) \subset \Omega$, die somit in $\Omega \setminus \hat{K}_\Omega$ enthalten ist. Also ist $\Omega \setminus \hat{K}_\Omega$ offen.
Ferner gilt $\overline{\hat{K}_\Omega} \subset \Omega$: wenn es einen Punkt $z_0 \in \overline{\hat{K}_\Omega} \setminus \Omega$ gibt, so liegt z_0 in $\partial \hat{K}_\Omega \cap \partial \Omega$. Dann ist aber $f(z) = 1/(z - z_0)$ holomorph in Ω. Ist daher $(z_n)_n$ eine Folge in $\hat{K}_\Omega$ mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$, dann ist nach 4.11 $|f(z_n)| \leq |f|_K \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur Unbeschränktheit der Folge $(f(z_n))_n$ ist.
Wir erhalten schließlich : $\overline{\hat{K}_\Omega} = \hat{K}_\Omega$ (denn ist $(z_n)_n$ eine Folge in $\hat{K}_\Omega$ mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$, so ist nach der vorigen Aussage $z_0 \in \Omega$ und daher gilt $|f(z_0)| = \lim_{n \to \infty} |f(z_n)| \leq |f|_K \ , \ \forall \ f \in \mathcal{H}(\Omega)$, was $z_0 \in \hat{K}_\Omega$ impliziert.)
Die holomorph konvexe Hülle $\hat{K}_\Omega$ ist also selbst eine kompakte Teilmenge von Ω und erfüllt immer die Bedingung (c) von 4.9: $\forall \ z \in \Omega \setminus \hat{K}_\Omega \ \ \exists \ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $|f(z)| > |f|_K$.
Also kann man Funktionen, die in einer Umgebung von $\hat{K}_\Omega$ holomorph sind, durch Funktionen aus $\mathcal{H}(\Omega)$ gleichmäßig auf K approximieren.

(f) Es existiert eine kompakte Ausschöpfung $(K_j)_j$ von Ω (siehe 2.44), die noch zusätzlich die Eigenschaft $(K_j)\hat{}_\Omega = K_j \ , \ j \in \mathbb{N}$, hat : dazu wählen wir eine beliebige kompakte Ausschöpfung $(K_j^*)_j$ von Ω und setzen $K_1 = (K_1^*)\hat{}_\Omega$, dann ist $K_1 = (K_1)\hat{}_\Omega$. Es seien $K_1, \dots, K_{n-1}$ schon konstruiert. Dann existiert ein $\lambda(n) \in \mathbb{N}$ mit $K_{n-1} \subset (K^*_{\lambda(n)})^\circ$. Wir setzen $K_n = (K^*_{\lambda(n)})\hat{}_\Omega$. Dann sind die K_n kompakte Teilmengen von Ω mit $K_n = (K_n)\hat{}_\Omega$ und es gilt $K_n \subset (K^*_{\lambda(n+1)})^\circ \subset K^\circ_{n+1}$, außerdem ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K^*_{\lambda(n)})\hat{}_\Omega \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K^*_{\lambda(n)} = \Omega.$$

Satz 4.13. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $\hat{K}_\Omega$ die Vereinigung von K mit allen Zusammenhangskomponenten von $\Omega \setminus K$, welche in Ω relativ kompakt sind.*

Beweis. Sei O eine Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus K$, welche relativ kompakt in Ω ist. Nach dem ersten Schritt des Beweises von 4.9 gilt $\partial O \subseteq K$ und daher nach dem Maximumprinzip

$$\sup_{z \in \overline{O}} |f(z)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \quad , \quad \forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Somit ist $O \subseteq \hat{K}_\Omega = \{z \in \Omega : |f(z)| \leq |f|_K\ ,\ \forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega)\}$.
Bezeichnet man mit K_1 die Vereinigung von K mit allen in Ω relativ kompakten Zusammenhangskomponenten von $\Omega \setminus K$, so haben wir eben gezeigt $K_1 \subseteq \hat{K}_\Omega$.
Weiters ist $\Omega \setminus K_1$ offen, weil diese Menge eine Vereinigung von offenen Zusammenhangskomponenten von $\Omega \setminus K$ ist. Daraus folgt $K_1 \subset \Omega$ ist kompakt und erfüllt Bedingung (b) aus 4.9, sodass aus (c) in 4.9. $K_1 = (K_1)\hat{}_\Omega$ folgt, und da $K \subseteq K_1$ ist, ergibt dies

$$\hat{K}_\Omega \subseteq (K_1)\hat{}_\Omega = K_1.$$

$\square$

Bemerkung. Die Bedingungen (a),(b),(c) des Runge'schen Approximationssatzes 4.9 sind für $K \subset \Omega$ genau dann erfüllt, wenn $K = \hat{K}_\Omega$. Man nennt dann K holomorph konvex.

Sind Ω_1 und Ω_2 zwei offene Teilmengen in $\mathbb{C}$ mit $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, so gilt $\mathcal{H}(\Omega_1) \supseteq \mathcal{H}(\Omega_2)$. Es stellt sich nunmehr die Frage, unter welchen Bedingungen jede Funktion $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von Ω_1 durch Funktionen aus $\mathcal{H}(\Omega_2)$ approximiert werden kann. Mit anderen Worten : wann ist $\mathcal{H}(\Omega_2)$ dicht in $\mathcal{H}(\Omega_1)$?

Satz 4.14. *Sind Ω_1 und Ω_2 zwei offene Teilmengen in $\mathbb{C}$ mit $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent :*

(a) Jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ kann gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von Ω_1 durch Funktionen aus $\mathcal{H}(\Omega_2)$ approximiert werden , d.h. $\mathcal{H}(\Omega_2)$ ist dicht in $\mathcal{H}(\Omega_1)$.

(b) Ist $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = L \cup F$, wobei $F \subset \Omega_2$ abgeschlossen ist und L kompakt ist mit $L \cap F = \emptyset$, dann ist $L = \emptyset$.

(c_1) $\forall\ K \subset \Omega_1$ kompakt gilt : $\hat{K}_{\Omega_2} = \hat{K}_{\Omega_1}$.

(c_2) $\forall\ K \subset \Omega_1$ kompakt gilt : $\hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \hat{K}_{\Omega_1}$.

(c_3) $\forall\ K \subset \Omega_1$ kompakt gilt : $\hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ ist kompakt.

Beweis. $(a) \Rightarrow (c_2)$: sei $K \subset \Omega_1$, nach Definition ist

$$\hat{K}_{\Omega_2} := \{z \in \Omega_2 : |f(z)| \leq |f|_K\ \forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega_2)\}$$

und

$$\hat{K}_{\Omega_1} := \{z \in \Omega_1 : |f(z)| \leq |f|_K\ \forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega_1)\}.$$

Da man nach (a) jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von Ω_1 durch Funktionen aus $\mathcal{H}(\Omega_2)$ approximieren kann, ist

$$\hat{K}_{\Omega_1} \supset \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1,$$

denn für $z \in \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ und $\epsilon > 0$ beliebig und $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ existiert ein $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ mit

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |g(z)| + |f(z) - g(z)| \leq |g(z)| + \epsilon \\ &\leq |g|_K + \epsilon \leq |f-g|_K + |f|_K + \epsilon \leq |f|_K + 2\epsilon, \end{aligned}$$

wir verwenden hier die Approximation auf der kompakten Menge $K \cup \{z\}$.
Aus $\mathcal{H}(\Omega_1) \supseteq \mathcal{H}(\Omega_2)$, folgt $\hat{K}_{\Omega_1} \subseteq \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Das ergibt (c_2).

$(c_2) \;\Rightarrow\; (c_3)$: folgt aus 4.12 (e)

$(c_3) \;\Rightarrow\; (a)$: Sei $K' = \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ und $K'' = \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1^c$. Dann ist $K' \cup K'' = \hat{K}_{\Omega_2}$ und $K' \cap K'' = \emptyset$. Es gilt $K' \subset \Omega_1$ und $K' \cup K'' \subset \Omega_2$. Nach (c_3) ist K' kompakt, nach 4.12 (e) ist auch K'' kompakt.
Sei $h \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. Definiere

$$g = \begin{cases} h & \text{in einer Umgebung von } K' \\ 1 & \text{in einer Umgebung von } K'' \end{cases}$$

wobei die Umgebungen disjunkt gewählt sind. Dann ist g holomorph in einer Umgebung der kompakten Menge $K' \cup K'' = \hat{K}_{\Omega_2}$ und kann daher nach 4.9. (es ist (b) von 4.9 erfüllt) gleichmäßig auf $K' \cup K''$ durch eine Funktion aus $\mathcal{H}(\Omega_2)$ approximiert werden. Daher kann insbesondere h gleichmäßig auf K durch eine Funktion aus $\mathcal{H}(\Omega_2)$ approximiert werden und (a) ist gezeigt.

Wählt man für $h = 0$, so ist

$$g = \begin{cases} 0 & \text{in einer Umgebung von } K' \\ 1 & \text{in einer Umgebung von } K'' \end{cases}$$

und es existiert wieder nach 4.9 eine approximierende Funktion $\phi \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ mit

$$|\phi(z)| > |\phi(\zeta)| \;,\; \forall\, z \in K'' \;,\; \forall\, \zeta \in K'.$$

Nun ist aber $K \subset K'$ und

$$K' \cup K'' = \hat{K}_{\Omega_2} = \{z \in \Omega_2 : |\phi(z)| \leq |\phi|_K \;\forall\, \phi \in \mathcal{H}(\Omega_2)\},$$

also muss $K'' = \emptyset$ sein und daher gilt $\hat{K}_{\Omega_2} = \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Nun wissen wir aber bereits, dass aus (c_3) die Bedingung (c_2) folgt und erhalten daher $\hat{K}_{\Omega_2} = \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \hat{K}_{\Omega_1}$, somit haben wir auch die Implikation $(c_3) \;\Rightarrow\; (c_1)$ bewiesen.

$(c_1) \;\Rightarrow\; (c_2)$: Nach Voraussetzung gilt $\hat{K}_{\Omega_1} = \hat{K}_{\Omega_2}$. Da stets

$$\hat{K}_{\Omega_1} \subseteq \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 \subseteq \hat{K}_{\Omega_2}$$

gilt, folgt sofort $\hat{K}_{\Omega_1} = \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$.

Bisher haben wir somit die Äquivalenz der Bedingungen $(a), (c_1), (c_2), (c_3)$ gezeigt.
Nun beweisen wir noch : $(b) \;\Leftrightarrow\; (c_1)$, dann sind wir fertig.

$(c_1) \;\Rightarrow\; (b)$: Für eine kompakte Menge $K \subset \Omega_1$ gilt nach Voraussetzung $\hat{K}_{\Omega_1} = \hat{K}_{\Omega_2}$. Sei $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = L \cup F$, wobei L kompakt und F abgeschlossen in Ω_2 ist und $L \cap F = \emptyset$; z.z. : $L = \emptyset$.
Sei dazu $\omega \supset L$ eine offene Menge, die in Ω_2 relativ kompakt ist und für die $\overline{\omega} \cap F = \emptyset$ gilt. Es ist $\partial\omega \subset \Omega_2$ und

$$\partial\omega \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) = \partial\omega \cap (L \cup F) = (\partial\omega \cap L) \cup (\partial\omega \cap F) = \emptyset.$$

Somit muss $\partial\omega \subset \Omega_1$. Ferner folgt aus dem Maximumprinzip

$$(\partial\omega)\hat{}_{\Omega_2} = \{z \in \Omega_2 : |f(z)| \leq |f|_{\partial\omega} = |f|_\omega \;,\; \forall\, f \in \mathcal{H}(\Omega_2)\}$$

und daher ist $\omega \subseteq (\partial\omega)\hat{}_{\Omega_2}$ und, da $L \subset \omega$, folgt nun aus der Voraussetzung (c_1), angewandt auf die kompakte Menge $\partial\omega$

$$L \subset (\partial\omega)\hat{}_{\Omega_2} = (\partial\omega)\hat{}_{\Omega_1} \subseteq \Omega_1.$$

Also ist $L \subset \Omega_1$; weil aber $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = L \cup F$, folgt $L = \emptyset$.

$(b) \Rightarrow (c_1)$: Sei $K \subset \Omega_1$ kompakt. Es gilt immer : $\hat{K}_{\Omega_1} \subseteq \hat{K}_{\Omega_2}$. Daher bleibt noch $\hat{K}_{\Omega_1} \supseteq \hat{K}_{\Omega_2}$ zu zeigen. Dazu verwenden wir 4.13 Sei O eine Zusammenhangskomponente von $\Omega_2 \setminus K$, welche in Ω_2 relativ kompakt ist. Wir zeigen : $O \subseteq \Omega_1$. Dann sind wir nach 4.13 fertig. Aus dem ersten Teil des Beweises von 4.9 wissen wir $\partial O \subseteq K \subset \Omega_1$. Nun sei $L = \overline{O} \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$. Dann ist L kompakt und es gilt

$$L = (O \cup \partial O) \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1) = (O \cap \Omega_2 \setminus \Omega_1) \cup (\partial O \cap \Omega_2 \setminus \Omega_1) = O \cap \Omega_2 \setminus \Omega_1,$$

da $\partial O \subseteq \Omega_1$. Sei weiters $F = O^c \cap (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$. Dann ist F abgeschlossen in Ω_2 und es gilt $L \cup F = \Omega_2 \setminus \Omega_1$. Da wir hier (b) voraussetzen, folgt $L = \emptyset$ und daher ist $O \subseteq \Omega_1$. □

KOROLLAR 4.15. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann gilt : die Polynome liegen dicht in $\mathcal{H}(\Omega)$ (d.h. jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ kann gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von Ω durch Polynome approximiert werden) $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist zusammenhängend.*

BEWEIS. Sei $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ zusammenhängend. In $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ liegen die Polynome dicht (Taylor'sche Lehrsatz). Setze $\Omega_2 = \mathbb{C},\ \Omega_1 = \Omega$ und verwende 4.14: sei $\Omega_2 \setminus \Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \Omega = L \cup F$, wobei L kompakt und F abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist, sowie $L \cap F = \emptyset$. Wir zeigen, dann ist $L = \emptyset$: dazu sei $\tilde{F} = F \cup \{\infty\}$; dann folgt $\tilde{F} \cap L = \emptyset$ und $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega = \tilde{F} \cup L$, wobei nun $\tilde{F} \neq \emptyset$. Da beide Mengen $\tilde{F}$ und L abgeschlossen sind, muss $L = \emptyset$, denn sonst bekämen wir einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ zusammenhängend ist. Daher folgt nun aus 4.14, dass $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ dicht in $\mathcal{H}(\Omega)$ liegt.

Angenommen $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist nicht zusammenhängend. Es genügt nunmehr zu zeigen, dass Bedingung (b) aus 4.14 nicht erfüllt ist. Wir können jetzt $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ als Vereinigung $L \cup \tilde{F}$ darstellen, wobei L kompakt in $\mathbb{C}$ und $\tilde{F}$ abgeschlossen in $\overline{\mathbb{C}}$ ist, sowie $\infty \in \tilde{F},\ L \neq \emptyset$ und $L \cap \tilde{F} = \emptyset$. Sei $F = \tilde{F} \setminus \{\infty\}$. Dann ist F abgeschlossen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \setminus \Omega = L \cup F$, wobei $L \cap F = \emptyset$. Somit ist Bedingung (b) aus 4.14 nicht erfüllt. □

BEMERKUNG. Vergleiche genau die Aussagen von 4.10 und 4.15 !

BEISPIEL. Sei $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Im z < 1\}$. Dann ist $\mathbb{C} \setminus \Omega$ nicht zusammenhängend, aber $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist zusammenhängend.

BEMERKUNG (Klassische Version des Runge'schen Approximationssatzes). Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge von Ω. Es gelte $\hat{K}_\Omega = K$. Dann läss t sich jede Funktion, die in einer Umgebung von K holomorph ist, gleichmäßig auf K durch rationale Funktionen approximieren, deren Polstellen außerhalb von Ω liegen.

4.4. Der Satz von Mittag–Leffler

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(z_j)_j$ eine diskrete Folge voneinander verschiedener Punkte in Ω, weiters seien

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk}}{(z-z_j)^k}$$

Hauptteile in den Punkten z_j.
Gesucht : $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, welches in den Punkten z_j die vorgegebenen Hauptteile f_j besitzt.
Ansatz : $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$. Konvergenz?
Wie werden "konvergenzerzeugende Summanden" angeben, welche die vorgegebenen Hauptteile unverändert lassen.

Satz 4.16 (Satz von Mittag–Leffler). [3] *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(z_j)_j$ eine diskrete Folge voneinander verschiedener Punkte in Ω, weiters seien f_j in einer Umgebung von z_j meromorphe Funktionen, $j \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, sodass $f - f_j$ in einer Umgebung von z_j holomorph ist, $j \in \mathbb{N}$, d.h. $f - f_j$ besitzt in z_j eine hebbare Singularität. Man nennt f eine Lösung des Mittag–Leffler Problems.*

Beweis. Nach 2.71 können wir voraussetzen, dass

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk}}{(z-z_j)^k},\ j \in \mathbb{N}.$$

Wir konstruieren $u_j \in \mathcal{H}(\Omega)$, sodass

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(z) - u_j(z))$$

konvergent ist. Da $u_j \in \mathcal{H}(\Omega)$, sind dann die Hauptteile von f genau die vorgegebenen f_j. Dazu wählen wir eine kompakte Ausschöpfung $(K_j)_j$ von Ω mit $\hat{(K_j)}_\Omega = K_j$, $j \in \mathbb{N}$ (siehe 4.12), wir können auch noch voraussetzen, dass $z_k \notin K_j \ \forall\ k \geq j$. Die Funktionen f_j sind holomorph in einer Umgebung von K_j, da $z_j \notin K_j$, weiters ist $\hat{(K_j)}_\Omega = K_j$. Daher existieren nach 4.9 $u_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit

$$|f_j(z) - u_j(z)| < 2^{-j}\ ,\ \forall\ z \in K_j.$$

Dann konvergiert

$$\sum_{j=k}^{\infty} (f_j(z) - u_j(z))$$

gleichmäßig auf K_k und ist holomorph im Innern von K_k, denn es gilt die Abschätzung

$$\sum_{j=k}^{\infty} |f_j(z) - u_j(z)| < \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} < \infty\ ,\ \forall z \in K_k$$

und alle f_j sind holomorph im Inneren von K_k, $\forall\ j \geq k$.
Ist nun $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Teilmenge, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq K_k$, sodass dann für

$$f(z) = \sum_{j=1}^{k-1} (f_j(z) - u_j(z)) + \sum_{j=k}^{\infty} (f_j(z) - u_j(z))$$

[3] Mittag–Leffler, Magnus Gösta (1846–1927)

der zweite Summand gleichmäßig auf K konvergiert. Also hat f die gewünschten Eigenschaften. □

Beispiel 4.17. Sei $\Omega = \mathbb{C}$, und seien $a_0 = 0,\ a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ voneinander verschiedene Punkte mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.
Gesucht : $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit einfachen Polen in den Punkten a_n und Residuen c_n, also mit Hauptteilen $c_n/(z-a_n)$ in den Punkten a_n für $n = 0, 1, \dots$.
Seien $\epsilon_j > 0$ mit $\sum_{j=1}^\infty \epsilon_j < \infty$. Die Reihe

$$\frac{1}{z-a_n} = -\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{z}{a_n}\right)^k$$

ist gleichmäßig konvergent auf den kompakten Teilmengen von $\{z : |z| < |a_n|\}$. Man wähle nun $l_n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\left|\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{l_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right| < \frac{\epsilon_n}{|c_n|},$$

für $|z| \le \frac{|a_n|}{2}$ und $n = 0, 1, \dots$.
Sei nun

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{n=1}^\infty c_n\left(\frac{1}{z-a_n} + \sum_{k=0}^{l_n}\frac{z^k}{a_n^{k+1}}\right).$$

Da der Ausdruck in der runden Klammer dem Betrag nach $\le \epsilon_n/|c_n|$ für $|z| \le \frac{|a_n|}{2}$ ist, folgt $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Wir wählen nun für $a_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$ und $c_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall genügt es, für $l_k = 0$ zu setzen :

$$\left|\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right| = \left|\frac{z}{k(z-k)}\right| \le \frac{2R}{k^2},$$

wenn $|z| \le R$ und $|k| > 2R$, denn dann ist $|z-k| \ge |k| - |z| > |k| - R > |k| - |k|/2 = |k|/2$.
Also gilt die Abschätzung

$$\left|\sum_{|k|>2R}\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right)\right| \le \sum_{|k|>2R}\frac{2R}{k^2} < \infty,$$

für $|z| \le R$. Daher ist

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right)$$

meromorph auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $a_k = k \in \mathbb{Z}$ und Residuen $c_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Wir sind nunmehr in der Lage, die inhomogene Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichung allgemeiner zu behandeln :

Satz 4.18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Dann existiert ein $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mit $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = f$.* (vgl. 4.7)

BEWEIS. Sei $(K_j)_j$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω mit $\hat{(K_j)}_\Omega = K_j$. Wähle $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ mit $\psi_j = 1$ in einer Umgebung von K_j , $j \in \mathbb{N}$ und setze $\phi_1 = \psi_1$, sowie $\phi_j = \psi_j - \psi_{j-1}$, $\forall\, j > 1$. Dann ist $\phi_j = 0$ in einer Umgebung von K_{j-1} , $\forall\, j > 1$. Weiters ist nach Konstruktion

$$\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j = 1 \quad \text{auf } \Omega.$$

Es ist $f\phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ und wir definieren $f\phi_j = 0$ auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Dann ist $f\phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$, $j \in \mathbb{N}$ und nach 4.7 existiert $u_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ mit

$$\frac{\partial u_j}{\partial \overline{z}} = f\phi_j \ , \ j \in \mathbb{N}.$$

Da $f\phi_j = 0$ in einer Umgebung von K_{j-1} , $j > 1$, ist u_j holomorph in einer Umgebung von K_{j-1}. Nach 4.9 existieren $v_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $|u_j - v_j| < 2^{-j}$ auf K_{j-1} , $j > 1$. (v_1 sei eine beliebige holomorphe Funktion auf Ω.)
Nun setzen wir

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j)$$

und bemerken, dass für jedes $l > 1$

$$\sum_{j=l+1}^{\infty} (u_j - v_j)$$

aus Summanden besteht, die alle in einer Umgebung von K_l holomorph sind und die Summe nach Konstruktion gleichmäßig auf K_l konvergiert und somit eine im Innern von K_l holomorphe Funktion darstellt. Es folgt

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j)$$

konvergiert gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Ω, was auch für alle Ableitungen von u zutrifft. Daher gilt $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und wir können in der folgenden Rechnung Differentiation mit Summation vertauschen : auf Ω gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial v_j}{\partial \overline{z}} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} f\phi_j = f \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j = f.$$

$\square$

Mit Hilfe des letzten Satzes können wir den Satz von Mittag–Leffler weitgehend verallgemeinern, was von besonderer Bedeutung für die komplexe Analysis mehrerer Veränderlicher ist.

SATZ 4.19. *Sei $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ eine offene Überdeckung von Ω. Weiters seien $f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j)$, $j \in \mathbb{N}$ mit $f_j - f_k \in \mathcal{H}(\Omega_j \cap \Omega_k)$ für alle Paare (j,k), für die $\Omega_j \cap \Omega_k \neq \emptyset$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $f - f_j \in \mathcal{H}(\Omega_j)$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$.*

BEMERKUNG. Aus 4.19 folgt 4.16: ist $(z_j)_j$ eine diskrete Folge in Ω und sind f_j meromorph in einer Umgebung von z_j, dann wählen wir für Ω_j Umgebungen der z_j mit $z_k \notin \Omega_j$, $\forall\, k \neq j$, Ω_0 überdecke den Rest von Ω. Wir können auch noch voraussetzen, dass $f_j \in \mathcal{H}(\Omega_j \setminus \{z_j\})$. Dann ist $f_k - f_j \in \mathcal{H}(\Omega_j \cap \Omega_k)$. Somit folgt aus 4.19 die Existenz eines $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $f - f_j \in \mathcal{H}(\Omega_j)$, was die Behauptung von 4.16 ergibt.

SATZ 4.20. *Sei* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ *eine offene Überdeckung von* Ω. *Weiters seien* $g_{jk} \in \mathcal{H}(\Omega_j \cap \Omega_k)$ *mit* $g_{jk} = -g_{kj}$ *und* $g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0$ *für alle Tripel* (j,k,l), *für die* $\Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l \neq \emptyset$. *(Man nennt* (g_{jk}) *einen Cozyklus .) Dann existieren* $g_j \in \mathcal{H}(\Omega_j)$ *mit* $g_{jk} = g_k - g_j$ *für alle Paare* (j,k) *mit* $\Omega_j \cap \Omega_k \neq \emptyset$. *(Man sagt : die erste Kohomologiegruppe verschwindet.)*

BEMERKUNG. Aus 4.20 folgt 4.19: ist $f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j)$, so setzen wir $g_{jk} = f_k - f_j \in \mathcal{H}(\Omega_j \cap \Omega_k)$. Dann erfüllt (g_{jk}) die Cozyklusbedingungen $g_{kj} = f_j - f_k = -(f_k - f_j) = -g_{jk}$ und $g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = f_k - f_j + f_l - f_k + f_j - f_l = 0$. Also existieren nach 4.20 $g_j \in \mathcal{H}(\Omega_j)$ mit $g_{jk} = g_k - g_j$ auf $\Omega_k \cap \Omega_j$, d.h. $f_k - f_j = g_k - g_j$ und daher $f_k - g_k = f_j - g_j$ auf $\Omega_k \cap \Omega_j$, wobei $f_k - g_k \in \mathcal{M}(\Omega_k)$ und $f_j - g_j \in \mathcal{M}(\Omega_j)$. Daher ist durch den Ansatz $f = f_j - g_j$ auf Ω_j eine auf ganz Ω meromorphe Funktion definiert und es gilt $f - f_j = -g_j \in \mathcal{H}(\Omega_j)$, also folgt 4.19

BEWEIS VON SATZ 4.20. Sei $(\phi_j)_j$ eine $\mathcal{C}^\infty$– Zerlegung der Eins bezüglich der Überdeckung $(\Omega_j)_j$ von Ω, es gilt also $\phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_j)$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \phi_j = 1$ auf Ω. Für fixes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$h_k = \sum_j \phi_j g_{jk},$$

wobei über alle j summiert wird, für die $\Omega_k \cap \Omega_j \neq \emptyset$. Dann folgt aus den Cozyklusbedingungen auf $\Omega_k \cap \Omega_l$

$$h_k - h_l = \sum_j \phi_j (g_{jk} - g_{jl}) = \sum_j \phi_j (g_{jk} + g_{lj}) = \sum_j \phi_j g_{lk} = g_{lk} \sum_j \phi_j = g_{lk},$$

nach Konstruktion der $\mathcal{C}^\infty$–Zerlegung (siehe 4.3). Die Funktionen h_k erfüllen zwar schon die Bedingung $g_{lk} = h_k - h_l$, sind jedoch noch nicht holomorph. Mit Hilfe der inhomogenen Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichung konstruieren wir jetzt einen Korrekturterm u, sodass dann $g_k = h_k + u$ holomorph auf Ω_k ist.
Da $g_{lk} \in \mathcal{H}(\Omega_l \cap \Omega_k)$, folgt

$$\frac{\partial h_k}{\partial \bar z} = \frac{\partial h_l}{\partial \bar z} \quad \text{auf} \quad \Omega_l \cap \Omega_k.$$

Also ist durch den Ansatz $\psi := \frac{\partial h_k}{\partial \bar z}$ auf Ω_k , $k \in \mathbb{N}$, eine Funktion in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ definiert. Nach 4.18 existiert nun ein $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mit $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = -\psi$.
Sei nun $g_k = h_k + u$. Dann ist $g_k - g_l = h_k + u - h_l - u = g_{lk}$ und

$$\frac{\partial g_k}{\partial \bar z} = \frac{\partial h_k}{\partial \bar z} + \frac{\partial u}{\partial \bar z} = \frac{\partial h_k}{\partial \bar z} - \psi = \psi - \psi = 0,$$

also ist $g_k \in \mathcal{H}(\Omega_k)$. □

4.5. Der Weierstraß'sche Produktsatz

DEFINITION 4.21. (1) Sei $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn der $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$ existiert und ungleich Null ist.
(2) Sei $(a_n)_n$ eine beliebige Folge in $\mathbb{C}$. Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, wenn fast alle $a_n \neq 0$ und das Produkt

$$\prod_{n=1, a_n \neq 0}^{\infty} a_n$$

im Sinne von (1) existiert. Ist mindestens ein $a_n = 0$, so wird $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ Null gesetzt.

Bemerkung. Ist $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$; ist $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ konvergent, dann ist $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Lemma 4.22. *Seien $u_n \neq -1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wert von $\log(1+u_n)$ gewählt werden kann, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$ konvergiert, dann ist das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ konvergent.*

Beweis. Wie verwenden die Funktionalgleichung, sowie die Stetigkeit der Exponentialfunktion : aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N}(1+u_n) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \exp\log(1+u_n) &= \lim_{N\to\infty} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} \log(1+u_n)\right) \\ = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)\right).\end{aligned}$$

□

Lemma 4.23. *Sei Log der Hauptzweig des Logarithmus. Dann gilt :*
$\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+u_n)$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergiert absolut.

Beweis. Wir behaupten : für $|u| \leq 1/2$ gilt

$$\frac{|u|}{2} \leq |\mathrm{Log}(1+u)| \leq \frac{3|u|}{2},$$

daraus folgt die Aussage des Lemmas.
Für $|u| < 1$ gilt $\mathrm{Log}(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 - + \ldots$, daher ist

$$\begin{aligned}\left|1 - \frac{\mathrm{Log}(1+u)}{u}\right| &= |1 - 1 + u/2 - u^2/3 + - \ldots| \\ &\leq \frac{|u|}{2}(1 + |u| + |u|^2 + \ldots) = \frac{\frac{|u|}{2}}{1-|u|} \text{ da } |u| < 1.\end{aligned}$$

Ist nun $|u| \leq 1/2$, dann folgt

$$\left|1 - \frac{\mathrm{Log}(1+u)}{u}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

□

Bemerkung. Seien $f_n \in \mathcal{H}(U)$, $n \in \mathbb{N}$. Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge K von U, wenn für jede kompakte Teilmenge K von U ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{Log}(1+f_n)$ gleichmäßig und absolut auf K konvergiert. Die Grenzfunktion ist in diesem Fall wieder holomorph auf U (dies folgt aus 4.22 und 4.23).

Lemma 4.24. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien a, b in ein und derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus U$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{H}(U)$ mit*

$$\exp(f(z)) = \frac{z-a}{z-b}\ ,\ z \in U.$$

(d.h. es existiert ein holomorpher Logarithmus von $z \mapsto (z-a)/(z-b)$ auf U)

Beweis. Seien G_k , $k \in \mathbb{N}$, die Zusammenhangskomponenten von U. U ist dann die Vereinigung der Gebiete G_k.
Wenn a, b in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus U$ liegen, so liegen a, b auch in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus G_k$, $\forall\, k$. Wir betrachten $g(z) = \frac{z-a}{z-b}$ auf G_k. Um zu zeigen, dass g einen holomorphen Logarithmus auf G_k besitzt, genügt es nach 2.30, die Existenz einer Stammfunktion von g'/g auf G_k nachzuweisen. Nach 2.8 genügt es dann, zu zeigen, dass

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0,$$

für jeden geschlossenen Pfad γ in G_k.
Nun ist

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{z-b}{z-a}\left(\frac{1}{z-b} - \frac{z-a}{(z-b)^2}\right) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$$

und daher

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-a} - \int_\gamma \frac{dz}{z-b} = 2\pi i(\mathrm{Ind}_\gamma(a) - \mathrm{Ind}_\gamma(b)).$$

a, b sind in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus G_k$ und daher auch in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Nach 2.14 ist die Windungszahl lokal konstant und somit $\mathrm{Ind}_\gamma(a) - \mathrm{Ind}_\gamma(b) = 0$.
Also existiert ein $f_k \in \mathcal{H}(G_k)$ mit

$$\exp(f_k(z)) = \frac{z-a}{z-b}\ ,\ z \in G_k.$$

Definiere nun $f \in \mathcal{H}(U)$ durch $f(z) = f_k(z)$, $z \in G_k$, $k \in \mathbb{N}$. □

Wir konstruieren nun holomorphe Funktionen, die in vorgegebenen Punkten Nullstellen vorgegebener Ordnung besitzen.

Satz 4.25 (Weierstraß'sche Produktsatz). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(z_j)_j$ eine diskrete Folge in Ω voneinader verschiedener Punkte, seien ferner $n_j \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$.*
Dann existiert eine meromorphe Funktion f auf Ω, welche holomorph und $\neq 0$ ist ausgenommen in den Punkten z_j, und $f(z)(z-z_j)^{-n_j}$ ist holomorph in einer Umgebung von z_j und dort auch $\neq 0$,$\forall\, j \in \mathbb{N}$.
(D.h. f hat in den Punkten z_j, wo $n_j > 0$, eine Nullstelle der Ordnung n_j und in den Punkten z_j, wo $n_j < 0$, einen Pol der Ordnung n_j.)

Bemerkung. Sei $K \subset \Omega$ kompakt mit $\hat{K}_\Omega = K$. Dann gelten die folgenden Aussagen :
(1) $\forall\, z \in \partial\Omega$ existiert eine Umgebung $U(z)$ von z und eine Zusammenhangskomponente U von $\Omega \setminus K$ mit $U \cap U(z) \neq \emptyset$.
(2) Für jede Zusammenhangskomponente U von $\Omega \setminus K$ existiert ein $z_0 \in \partial\Omega$ mit $U \cap U(z_0) \neq \emptyset$, für jede Umgebung $U(z_0)$ von z_0.
(Wäre dies nicht der Fall, so müss te U relativ kompakt in Ω sein.)

Beweis von Satz 4.25. Der Ansatz ist hier durch ein Produkt gegeben

$$\prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)^{n_j},$$

wobei wir konvergenzerzeugende Faktoren konstruieren werden, die auf Ω nicht verschwinden.

Sei $(K_j)_j$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω mit $(K_j)\hat{}_\Omega = K_j\ ,\ j \in \mathbb{N}$.
Wir werden nun sukzessive rationale Funktionen f_j wählen, welche in K_j die vorgeschriebenen Nullstellen bzw. Pole besitzen, sowie Funktionen $g_j \in \mathcal{H}(\Omega)$, sodass

$$\left| \frac{f_{j+1}}{f_j}\ \exp(g_j) - 1 \right| < \epsilon_j \tag{4.6}$$

auf K_j, wobei $\epsilon_j > 0\ , j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=1}^\infty \epsilon_j < \infty$.
Angenommen $f_1, \dots, f_j$ und $g_1, \dots, g_{j-1}$ sind schon mit den erforderlichen Bedingungen gewählt : sei

$$h(z) = \prod_\nu (z - z_\nu)^{m_\nu}$$

für endlich viele $z_\nu \in \{z_j : j \in \mathbb{N}\}$ und $m_\nu \in \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine rationale Funktion mit den vorgeschriebenen Null– und Polstellen in K_{j+1} (das sind endlich viele). Dann können wir für

$$\frac{h(z)}{f_j(z)} = c \prod_{\nu \in M} (z - w_\nu)^{m_\nu} \tag{4.7}$$

schreiben, wobei $c \in \mathbb{C}\ ,\ c \neq 0\ ,\ M \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge ist, $w_\nu \in K_j^c$ und $w_\nu \in \{z_j : j \in \mathbb{N}\}\ ,\ \nu \in M$.
Da keine Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus K_j$ relativ kompakt in Ω ist, folgt aus der Bemerkung vor dem Beweis: für jedes $\nu \in M$ kann ein $w'_\nu \in K_{j+1}^c$ gewählt werden, welches in derselben Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus K_j$ liegt wie w_ν. (Begründung: jede Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus K_j$ hat Punkte in der Nähe von $\partial\Omega$. Ist nun w_ν in einer solchen Zusammenhangskomponente, so kommt diese in die Nähe von $\partial\Omega$, dort ist nun aber auch eine Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus K_{j+1}$ und in dieser Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus K_{j+1}$ wählen wir w'_ν.)
Setze nun

$$f_{j+1}(z) = h(z) \prod_{\nu \in M} (z - w'_\nu)^{-m_\nu}.$$

Dann ist f_{j+1} rational und hat in K_{j+1} die vorgeschriebenen Null– und Polstellen, und es gilt nach (4.7)

$$\frac{f_{j+1}(z)}{f_j(z)} = c\frac{h(z)}{f_j(z)} \prod_{\nu \in M} (z - w'_\nu)^{-m_\nu} = c \prod_{\nu \in M} \left(\frac{z - w_\nu}{z - w'_\nu} \right)^{m_\nu}.$$

Die letzte Funktion ist holomorph in einer Umgebung von K_j, die Punkte w_ν, w'_ν liegen in ein und derselben Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus K_j$ und daher existiert nach 4.24 ein holomorpher Logarithmus von

$$c \prod_{\nu \in M} \left(\frac{z - w_\nu}{z - w'_\nu} \right)^{m_\nu}$$

in einer Umgebung von K_j. Wir setzen

$$\exp(\phi_\nu(z)) = \left(\frac{z - w_\nu}{z - w'_\nu} \right)^{m_\nu}\ ,\ \nu \in M$$

und schreiben

$$\phi_\nu(z) = m_\nu \log_{(\nu)} \frac{z - w_\nu}{z - w'_\nu},$$

sowie

$$\log(f_{j+1}(z)/f_j(z)) := \log c + \sum_{\nu \in M} m_\nu \log_{(\nu)} \frac{z - w_\nu}{z - w'_\nu},$$

diese Funktion ist holomorph in einer Umgebung von K_j, und daher existiert nach 4.9 ein $g_j \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit

$$|\log(f_{j+1}/f_j) + g_j| < \log(1+\epsilon_j)$$

auf K_j. Durch Anwendung der Exponentialfunktion auf die obige Ungleichung erhalten wir (4.6).
Sei nun

$$f = \lim_{N\to\infty} f_{N+1} \prod_{j=1}^{N} \exp(g_j) = f_1 \prod_{j=1}^{\infty} [(f_{j+1}/f_j)\exp(g_j)].$$

Nach 4.23 konvergiert $\prod_{j=l}^{\infty}[(f_{j+1}/f_j)\exp(g_j)]$ gleichmäßig auf K_l gegen eine im Innern von K_l holomorphe Funktion, die dort auch nicht verschwindet, der Faktor

$$f_1 \prod_{j=1}^{l-1} [(f_{j+1}/f_j)\exp(g_j)]$$

hat die geforderten Null– und Polstellen in K_l. □

Bemerkung 4.26. [Klassische Version des Weierstraß'schen Produktsatz]
Sei $\Omega = \mathbb{C}$ und $0 = |a_0| < |a_1| < \dots,\ \lim_{j\to\infty}|a_j| = \infty\ ,\ n_j \in \mathbb{N}$.
Gesucht ist eine ganze Funktion u mit den a_j als Nullstellen der Ordnung $n_j\ ,\ j \in \mathbb{N}$.
Dazu lösen wir zunächst das Mittag–Leffler–Problem für die Hauptteile $n_j/(z-a_j)$ und erhalten ein $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit Polen in a_j und entsprechenden Hauptteilen $n_j/(z-a_j)\ ,\ j \in \mathbb{N}$.
Nach 4.17 hat h die Gestalt

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} n_j \left[\frac{1}{z-a_j} + \frac{1}{a_j}\sum_{k=0}^{k_j}\left(\frac{z}{a_j}\right)^k\right] = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(z),$$

dabei sind die Indizes k_j so gewählt, dass die Reihe gleichmäßig auf kompakten Teilmengen konvergiert, die keine Pole enthalten.
Sei nun

$$u_j(z) = \left[\left(1-\frac{z}{a_j}\right)\exp\left(\sum_{k=0}^{k_j}\frac{1}{k+1}\ \left(\frac{z}{a_j}\right)^{k+1}\right)\right]^{n_j}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt $u_j'/u_j = h_j$. Wir setzen dann

$$u(z) = z^{n_0}\prod_{j=1}^{\infty} u_j(z).$$

Sei $R > 0$ beliebig und j_0 so groß , dass $|a_j| > R$ für $j \geq j_0$. Dann hat u_j keine Nullstelle in $D_R(0)$ für $j \geq j_0$ und für $z \in D_R(0)$ sei

$$v_j(z) = \int_{[0,z]} \frac{u_j'(\zeta)}{u_j(\zeta)}\,d\zeta = \int_{[0,z]} h_j(\zeta)\,d\zeta.$$

Es folgt $\exp(v_j) = u_j$ (siehe 2.31) und

$$\sum_{j\geq j_0} v_j = \sum_{j\geq j_0}\log u_j.$$

Da nach Konstruktion die Summe $\sum_{j\geq j_0} h_j$ gleichmäßig auf $D_R(0)$ konvergiert, gilt dasselbe für $\sum_{j\geq j_0} v_j$ und daher auch für $\sum_{j\geq j_0}\log u_j$.

Nach 4.22 folgt jetzt auch die gleichmäßige Konvergenz von $\prod_{j\geq j_0} u_j$ auf $D_R(0)$. Also ist

$$u(z) = z^{n_0} \prod_{j=1}^{\infty} u_j(z)$$

die gesuchte ganze Funktion.

Beispiele.

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right),$$

$$\cos \pi z = \prod_{j\in\mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{a_j}\right) e^{z/a_j},$$

wobei $a_j = j + 1/2 \ , \ j \in \mathbb{Z}$.

4.6. Einige Anwendungen der Sätze von Mittag–Leffler und Weierstraß

Satz 4.27 (Interpolation). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(a_j)_j$ eine diskrete Folge in Ω voneinander verschiedener Punkte und sei $(b_j)_j$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen. Dann existiert ein $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(a_j) = b_j \ , \ j \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Nach 4.25 existiert ein $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $g(a_j) = 0 \ , j \in \mathbb{N}$, wobei alle Nullstelle die Ordnung 1 haben, also $g'(a_j) \neq 0$. Nun lösen wir das Mittag–Leffler– Problem für die Hauptteile

$$\frac{b_j}{g'(a_j)} \, \frac{1}{z - a_j} \ , \ j \in \mathbb{N}.$$

Die Lösung sei $h \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_j : j \in \mathbb{N}\})$. Wir setzen nun $f = gh$, dann ist zunächst $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_j : j \in \mathbb{N}\})$ und in den Punkten a_j gilt

$$f(a_j) = \lim_{z\to a_j} g(z)h(z) = \lim_{z\to a_j} \left[\frac{g(z) - g(a_j)}{z - a_j} \ (z - a_j)h(z)\right] = g'(a_j) \ \frac{b_j}{g'(a_j)} = b_j,$$

also hat f in den Punkten a_j hebbare Singularitäten. □

Satz 4.28. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $h \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dann existieren $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $h = f/g$ auf Ω.* (vgl. 2.71)

Beweis. Seien $(a_j)_j$ die Pole von h mit den Ordnungen n_j. Nach 4.25 existiert ein $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit Nullstellen der Ordnung n_j in den Punkten a_j. Definiere nun $f := hg$. Dann ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $h = f/g$. □

Satz 4.29. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann existiert ein $f \in \mathcal{H}(G)$, sodass jeder Randpunkt von G singulär für f ist (d.h. f läss t sich entlang keines Weges vom Innern von G zum Rand von G analytisch fortsetzen).*

Beweis. Wir werden eine Folge $(a_j)_j$ konstruieren, welche sich in der Nähe jedes Randpunktes von ∂G häuft und verwenden anschließend den Satz von Weierstraß , um eine Funktion $f \in \mathcal{H}(G)$ zu finden mit $f \not\equiv 0$ und $f(a_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Dieses f hat dann die gewünschte Eigenschaft.
Dazu konstruieren wir zunächst eine Folge von offenen Kreisen $(D_n)_n$ mit folgenden Eigenschaften : $\overline{D}_n \subset G$; $(D_n)_n$ ist lokal endlich (d.h. jede kompakte Teilmenge von G hat nur mit endlich vielen D_n nichtleeren Durchschnitt); $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = G$; die Radien r_n der D_n gehen bei $n \to \infty$ gegen Null.
Sei $(K_p)_p$ eine kompakte Ausschöpfung von G. Wir wählen die Kreise D_n nun wie folgt : $K_1 \subset D_1 \cup \cdots \cup D_{n_1}$ und

$$K_{p+1} \setminus \overset{\circ}{K}_p \subset D_{n_p+1} \cup \cdots \cup D_{n_{p+1}},$$

weiters $D_n \cap K_p = \emptyset$ für $n \geq 1 + n_{p+1}$ und der Radius von D_n sei $< 1/p$ für $n_p < n \leq n_{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$. Die Existenz solcher Kreise folgt aus der Tatsache, dass die Mengen $K_{p+1} \setminus \overset{\circ}{K}_p$ kompakt sind.
Sei $a_j \in D_j$ mit $a_j \neq a_k$ für $j \neq k$. Die Folge $(a_j)_j$ hat keinen Häufungspunkt in G, da $(D_n)_n$ lokal endlich ist. Daher existiert nach 4.25 ein $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(a_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$, aber $f \neq 0$ sonst.
Wir behaupten nun, dieses f hat die gewünschten Eigenschaften.
Angenommen es gibt einen Punkt $a \in \partial G$ sowie einen Pfad $\gamma : [0,1] \longrightarrow \overline{G}$ mit $\gamma([0,1)) \subset G$ und $\gamma(1) = a$, sodass ein $F \in \mathcal{H}(D_\rho(a))$, $\rho > 0$, existiert, das durch analytische Fortsetzung von f längs γ entstanden ist.
Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\gamma(t) \in D_\rho(a)$ für $1 - \epsilon \leq t \leq 1$. Sei U die Zusammenhangskomponente von $G \cap D_\rho(a)$, welche die Menge $\{\gamma(t) : 1 - \epsilon \leq t < 1\}$ enthält. Es gilt $F|_U = f|_U$. Sei nun $D' = D_{\rho/2}(a)$. Dann ist nach Konstruktion $D' \cap U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, aber $D' \cap U \not\subseteq \bigcup_{n=1}^{N} D_n$, $\forall\ N \in \mathbb{N}$. Also existiert eine Folge $(n_k)_k$ natürlicher Zahlen mit $D_{n_k} \cap (D' \cap U) \neq \emptyset$, wir können hier sogar voraussetzen (durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge), dass die Radien der D_{n_k} alle $< \rho/8$ sind. Dann gilt $D_{n_k} \subseteq D_\rho(a) \cap G$, $\forall\ k$ und $D_{n_k} \cap U \neq \emptyset$. Nun ist aber U eine Zusammenhangskomponente und D_{n_k} zusammenhängend, also muss $D_{n_k} \subseteq U$, $\forall\ k$. Da aber $F|_U = f|_U$, ist nun auch $F(a_{n_k}) = 0$, $\forall\ k$. Es gilt

$$a_{n_k} \in D_{n_k} \subseteq D_{3\rho/4}(a) \subset\subset D_\rho(a).$$

Somit hat F unendlich viele Nullstellen in einer relativ kompakten Teilmenge von $D_\rho(a)$, also existiert ein Häufungspunkt von Nullstellen von F in $D_\rho(a)$ und daher ist nach 2.27 $F \equiv 0$ auf $D_\rho(a)$. Es folgt $f \equiv 0$ auf U und wieder nach 2.27 $f \equiv 0$ auf G im Widerspruch zur Konstruktion von f. □

Bemerkung. Für holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}^2$ ist die Situation völlig verschieden : sei $\|z\| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$ und

$$G = \{z = (z_1, z_2) : 1/2 < \|z\| < 1\}.$$

Dann ist G ein Gebiet im $\mathbb{C}^2$ mit folgender Eigenschaft : für jedes $f \in \mathcal{H}(G)$ existiert ein $F \in \mathcal{H}(U)$, $U = \{z = (z_1, z_2) : \|z\| < 1\}$, mit $F|_G = f|_G$.
Gebiete im $\mathbb{C}^n$, für die Funktionen mit den Eigenschaften aus Satz 4.29 existieren, heißen Holomorphiegebiete. Satz 4.29 besagt also, dass jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ ein Holomorphiegebiet ist. Siehe [**26**] oder [**18**].

4.7. Normale Familien

Definition 4.30. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen in $\mathcal{H}(\Omega)$. Die Familie $\mathcal{F}$ heißt normal in Ω, wenn jede Folge von Elementen aus $\mathcal{F}$ eine auf den kompakten Teilmengen von Ω gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.
Eine Familie $\mathcal{F}$ heißt beschränkt auf Ω, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ eine Konstante $M(K) > 0$ existiert mit

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq M(K) \ , \ \forall\, f \in \mathcal{F}.$$

Satz 4.31 (Satz von Montel). [4] *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Jede beschränkte Familie ist normal.*

Beweis. Sei $(K_n)_n$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω. Dann existieren $\delta_n > 0$ mit $D_{2\delta_n}(z) \subseteq K_{n+1}$, $\forall\, z \in K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Seien $z', z'' \in K_n$ mit $|z' - z''| < \delta_n$, ferner sei $\gamma(t) = z' + 2\delta_n e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Dann gilt für ein beliebiges $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} f(z') - f(z'') &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z''}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(z' - z'') f(\zeta)}{(\zeta - z')(\zeta - z'')}\, d\zeta. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ist $\zeta \in \gamma^*$, so ist $|\zeta - z'| = 2\delta_n$ und $|\zeta - z''| > \delta_n$. Nach Voraussetzung gilt

$$\sup_{z \in K_{n+1}} |f(z)| \leq M(K_{n+1}) \ , \ \forall\, f \in \mathcal{F},$$

und daher folgt aus (4.8)

$$|f(z') - f(z'')| \leq \frac{1}{2\pi} 4\pi\delta_n |z' - z''| M(K_{n+1}) \frac{1}{2\delta_n} \frac{1}{\delta_n} = \frac{M(K_{n+1})}{\delta_n}\, |z' - z''|, \tag{4.9}$$

dies gilt für $z', z'' \in K_n$ mit $|z' - z''| < \delta_n$ und für jedes $f \in \mathcal{F}$.
Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{F}$ auf K_n gleichgradig stetig ist, d.h. $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ mit $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$,$\forall\, f \in \mathcal{F}$, wenn $z', z'' \in K_n$ und $|z' - z''| < \delta$.
Wähle bei vorgegebenem $\epsilon > 0$ für

$$\delta = \frac{\epsilon\, \delta_n}{M(K_{n+1})},$$

dann folgt aus (4.9)

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{M(K_{n+1})}{\delta_n}\, |z' - z''| < \frac{\epsilon\, \delta_n}{M(K_{n+1})} \frac{M(K_{n+1})}{\delta_n} = \epsilon.$$

Damit ist der analytische Teil des Beweises abgeschlossen. Der Rest besteht aus dem Satz von Arzelà–Ascoli :
Sei $(f_m)_m$ eine Folge in $\mathcal{F}$. Wähle eine abzählbare Teilmenge $E = \{w_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$, sodass $E \cap K_n$ dicht in K_n liegt, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{F}$ beschränkt ist, ist die Folge $(f_m(w_1))_m$ beschränkt in $\mathbb{C}$, und daher existiert eine Teilfolge $(f_{m,1})$ von (f_m), welche in w_1 konvergent ist. Nun ist wieder $(f_{m,1}(w_2))$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ und somit existiert eine Teilfolge $(f_{m,2})$ der Folge $(f_{m,1})$, welche in w_2 konvergent ist. Auf diese Art erhalten wir Folgen $(f_{m,j})$, welche in w_j konvergent sind und selbst Teilfolgen von $(f_{m,j-1})$ sind, für $j = 2, 3, \ldots$.

[4] Montel, Paul (1876–1927)

Also ist die Diagonalfolge $(f_{m,m})_m$ in allen Punkten von E konvergent, wir behaupten sie ist sogar gleichmäßig konvergent auf allen kompakten Teilmengen von Ω. Dazu genügt es , die gleichmäßige Konvergenz auf K_n , $n \in \mathbb{N}$, nachzuweisen.
Sei K_n fix, $\epsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ wie im ersten Teil des Beweises. Da K_n kompakt ist, existieren $z_1, \ldots, z_p \in K_n \cap E$ mit $K_n \subset \bigcup_{j=1}^{p} D_\delta(z_j)$. Weiters existiert ein $N > 0$, sodass

$$|f_{r,r}(z_j) - f_{s,s}(z_j)| < \epsilon \ , \ j = 1, \ldots, p \ ; \ r, s > N$$

(siehe Konstruktion der Diagonalfolge.)
Für jedes $z \in K_n$ gibt es ein $z_j \in E$ $(1 \leq j \leq p)$ mit $|z - z_j| < \delta$ und wir erhalten

$$|f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)| \leq |f_{r,r}(z) - f_{r,r}(z_j)| + |f_{r,r}(z_j) - f_{s,s}(z_j)| + |f_{s,s}(z_j) - f_{s,s}(z)| < 3\epsilon,$$

$\forall\ z \in K_n$ und $r, s > N$, wobei wir im ersten und dritten Term die gleichgradige Stetigkeit verwendet haben. Somit ist $(f_{m,m})_m$ eine gleichmäßige Cauchyfolge auf K_n, die nach 2.43 gleichmäßig auf K_n konvergiert. □

4.8. Der Riemann'sche Abbildungssatz

Mit Hilfe des Satzes von Montel werden wir nun die Existenz einer biholomorphen Abbildung $\phi : \Omega \longrightarrow D_1(0)$ beweisen, wobei $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

Lemma 4.32 (Schwarz'sche Lemma). [5]
Sei $f \in \mathcal{H}(D_1(0))$ *und* $\sup_{z \in D_1(0)} |f(z)| \leq 1$, *sowie* $f(0) = 0$. *Dann gilt :*
(a) $|f(z)| \leq |z|$, $\forall\ z \in D_1(0)$;
(b) $|f'(0)| \leq 1$.
Wenn in (a) für ein $z \in D_1(0) \setminus \{0\}$ *Gleichheit herrscht, oder wenn in (b) Gleichheit herrscht, dann gilt* $f(z) = \lambda z$ *für ein* $\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $|\lambda| = 1$.

Beweis. Sei $g(z) = f(z)/z$, $z \in D_1(0) \setminus \{0\}$. Da $f(0) = 0$ hat g in 0 eine hebbare Singularität (siehe 2.33), und es gilt

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = g(0).$$

Weiters ist für jedes $\epsilon > 0$ und $z \in D_{1-\epsilon}(0)$

$$|g(z)| \leq \max_{z \in D_{1-\epsilon}(0)} |g(z)| = \max_{z \in \partial D_{1-\epsilon}(0)} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{1-\epsilon},$$

wobei wir das Maximumprinzip verwendet haben. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $|g(z)| \leq 1$, $\forall\ z \in D_1(0)$, und daher $|f(z)| \leq |z|$, $\forall\ z \in D_1(0)$. Weiters ist $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.
Wenn ein $z_0 \in D_1(0) \setminus \{0\}$ existiert mit $|f(z_0)| = |z_0|$, dann folgt $|g(z_0)| = 1$ und wieder nach dem Maximiumprinzip $g(z) = \lambda$, wobei λ eine Konstante ist mit $|\lambda| = 1$.
Ist $|f'(0)| = 1$, dann ist $|g(0)| = 1$ und das Maximumprinzip liefert wieder dieselbe Aussage wie vorhin. □

[5] Schwarz, Hermann Amandus (1843–1921)

Satz 4.33. *Sei* $\alpha \in D_1(0)$ *und*

$$\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\ ,\ z \in \overline{D_1(0)}.$$

Dann gilt : ϕ_α *bildet* $\mathbb{T}$ *bijektiv auf* $\mathbb{T}$ *ab. Weiters ist* $\phi_\alpha(D_1(0)) = D_1(0)$, ϕ_α *ist injektiv auf* $D_1(0)$ *und* $\phi_\alpha(\alpha) = 0$. *Die Inverse von* ϕ_α *ist* $\phi_{-\alpha}$. *Ferner ist* $\phi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2$ *und* $\phi'_\alpha(\alpha) = 1/(1-|\alpha|^2)$.

Bemerkung. Jeder holomorphe Automorphismus des Einheitskreises ist von der Gestalt $\lambda\phi_\alpha$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist mit $|\lambda| = 1$ und $\alpha \in D_1(0)$. Dies folgt aus einer Anwendung des Schwarz'schen Lemmas (siehe Übungen).

Beweis von 4.33. ϕ_α ist holomorph bis auf einen Pol im Punkt $1/\overline{\alpha} \notin D_1(0)$. Ferner gilt

$$\phi_{-\alpha}(\phi_\alpha(z)) = \frac{\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} + \alpha}{1+\overline{\alpha}\ \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}} = \frac{z-\alpha+(1-\overline{\alpha}z)\alpha}{1-\overline{\alpha}z+\overline{\alpha}z-\overline{\alpha}\alpha} = \frac{z-|\alpha|^2 z}{1-|\alpha|^2} = z,$$

also ist ϕ_α injektiv auf $D_1(0)$ und hat $\phi_{-\alpha}$ als Inverse.
Sei $z_0 \in \mathbb{T}$, $z_0 = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|\phi_\alpha(e^{it})| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{1-e^{it}\overline{\alpha}}\right| = \left|\frac{e^{it}-\alpha}{e^{-it}-\overline{\alpha}}\right| = 1,$$

daher ist $\phi_\alpha(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$ und auch $\phi_{-\alpha}(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{T}$, also ist $\phi_\alpha(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.
Aus dem Maximumprinzip folgt nun $\phi_\alpha(D_1(0)) \subseteq D_1(0)$ desgleichen $\phi_{-\alpha}(D_1(0)) \subseteq D_1(0)$ und daher $\phi_\alpha(D_1(0)) = D_1(0)$. Die Aussagen über die Ableitung von ϕ_α rechnet man leicht nach. □

Satz 4.34 (Riemann'sche Abbildungssatz). *Sei* $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung* $h : \Omega \longrightarrow D_1(0)$, *also* $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ *und* $h^{-1} \in \mathcal{H}(D_1(0))$.

Beweis. Da $\Omega \neq \mathbb{C}$, existiert ein $w_0 \in \mathbb{C}$, $w_0 \notin \Omega$. Sei

$$\Sigma = \{\psi \in \mathcal{H}(\Omega) : \psi : \Omega \longrightarrow D_1(0) \text{ injektiv }\}.$$

Wir zeigen : $\exists\ \psi \in \Sigma$, das auch surjektiv ist.

(a) $\Sigma \neq \emptyset$:

Sei $f(z) = z - w_0$. Dann ist $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in \Omega$ und die Funktion $z \mapsto f'(z)/f(z) = 1/(z-w_0)$ ist holomorph auf Ω. Da Ω einfach zusammenhängend ist, folgt nach 2.63

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Pfad γ in Ω. Nach 2.8 besitzt f'/f eine Stammfunktion auf Ω und nach 2.30 besitzt dann f eine holomorphe Wurzel ϕ auf Ω, d.h. $\phi^2(z) = z - w_0$, $\forall\ z \in \Omega$.
ϕ ist injektiv : ist $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, so ist auch $\phi^2(z_1) = \phi^2(z_2)$ und daher $z_1 - w_0 = z_2 - w_0$, also $z_1 = z_2$.
ϕ ist nicht konstant und daher nach 2.47 offen. Weiters ist $\phi \neq 0$ auf Ω. Ist $z_0 \in \Omega$ und $\phi(z_0) = a \neq 0$, so existiert ein $r > 0$ mit $0 < r < |a|$, sodass $D_r(a) \subseteq \phi(\Omega)$.

Wir definieren nun $\psi(z) = r/(\phi(z) + a)$, $z \in \Omega$. Angenommen $\phi(z) = -a$ für ein $z \in \Omega$, dann ist $\phi^2(z) = a^2 = \phi^2(z_0)$ und daher $z = z_0$ Widerspruch! Somit ist $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$. ψ ist injektiv, da ϕ injektiv ist.
Weiters gilt : $D_r(-a) \cap \phi(\Omega) = \emptyset$. (Angenommen : $\exists \zeta \in \phi(\Omega)$ mit $|\zeta + a| < r$, dann $\exists\ z_1 \in \Omega$ mit $\phi(z_1) = \zeta$ und $|\phi(z_1) + a| < r$, also ist auch $|-\phi(z_1) - a| < r$ und damit $-\phi(z_1) \in D_r(a) \subseteq \phi(\Omega)$. Es gibt jedoch keine zwei Punkte $z_1, z_2 \in \Omega$ mit $\phi(z_1) = -\phi(z_2)$. Widerspruch!)
Daraus folgt $|\phi(z) + a| > r$, $\forall\ z \in \Omega$ und daher

$$|\psi(z)| = \frac{r}{|\phi(z) + a|} < \frac{r}{r} = 1\ ,\ \forall\ z \in \Omega,$$

hiermit ist $\psi \in \Sigma$.
Bem.: ist $\psi \in \Sigma$ und $\psi(\zeta_0) = \alpha$, dann ist auch $\phi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$ (siehe 4.33) und es gilt $\phi_\alpha(\psi(\zeta_0)) = \phi_\alpha(\alpha) = 0$, also gibt es in Σ auch Funktionen, die eine Nullstelle in einem vorgegebenen Punkt $\zeta_0 \in \Omega$ besitzen.

(b) Sei $z_0 \in \Omega$ fix und

$$\Sigma_0 = \{\psi \in \mathcal{H}(\Omega) : \psi(z_0) = 0\ ,\ \psi : \Omega \longrightarrow D_1(0) \text{ injektiv }\}.$$

Sei $\psi \in \Sigma_0$ und $\psi(\Omega) \neq D_1(0)$. Dann existiert ein $\psi_1 \in \Sigma_0$ mit $|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$.

Sei $\psi \in \Sigma_0$ und $\alpha \in D_1(0)$ mit $\alpha \notin \psi(\Omega)$. Sei ϕ_α wie in 4.33. Dann ist $\phi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$ und weil ϕ_α nur an der Stelle $z = \alpha$ verschwindet, hat $\phi_\alpha \circ \psi$ keine Nullstelle in Ω. Wie in (a) zeigt man nun, es existiert ein $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $g^2 = \phi_\alpha \circ \psi$. g ist dann wieder injektiv, also $g \in \Sigma$. Sei $\beta = g(z_0)$ und $\psi_1 = \phi_\beta \circ g$. Dann ist $\psi_1 \in \Sigma_0$, da $\psi_1(z_0) = \phi_\beta(g(z_0)) = \phi_\beta(\beta) = 0$. Setzt man für $w^2 = s(w)$, dann folgt

$$\psi = \phi_{-\alpha} \circ s \circ g = \phi_{-\alpha} \circ s \circ \phi_{-\beta} \circ \psi_1 = F \circ \psi_1,$$

wobei wir $F = \phi_{-\alpha} \circ s \circ \phi_{-\beta}$ gesetzt haben. Nach der Kettenregel ist

$$\psi'(z_0) = F'(\psi_1(z_0))\psi_1'(z_0) = F'(0)\psi_1'(z_0).$$

Für F gilt : $F(D_1(0)) \subseteq D_1(0)$ und $F(0) = F(\psi_1(z_0)) = \psi(z_0) = 0$, weiters ist F nach Definition nicht injektiv (wegen der Funktion s). Somit ist nach 4.32 $|F'(0)| < 1$ und es folgt $|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$. Also folgt (b).
Bem.: es gilt auch $\psi'(z_0) \neq 0$, da ψ injektiv ist (siehe 2.51).

(c) Sei $z_0 \in \Omega$ fix und $\eta = \sup\{|\psi'(z_0)| : \psi \in \Sigma_0\}$. Dann existiert ein $h \in \Sigma_0$ mit $\eta = |h'(z_0)|$. Jedes solche h ist nach (b) auch surjektiv. Es bleibt also nur noch die Existenz von h zu zeigen :
Die Familie Σ_0 ist wegen $|\psi(z)| < 1$,$\forall\ z \in \Omega$,$\forall\ \psi \in \Sigma_0$ beschränkt und daher nach 4.30 normal.
Es existiert eine Folge $(\psi_n)_n$ in Σ_0 mit

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n'(z_0)| = \eta.$$

Also gibt es eine Teilfolge, die wir wieder mit $(\psi_n)_n$ bezeichnen und die gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Ω gegen ein $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ konvergiert, weiters ist $|h'(z_0)| = \eta$. Nun ist $\eta > 0$ und daher ist h nicht konstant. Damit ist h eine offene Abbildung, insbesondere ist $h(\Omega)$ offen. Da $\psi_n(\Omega) \subseteq D_1(0)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, ist $h(\Omega) \subseteq \overline{D_1(0)}$ und sogar $h(\Omega) \subseteq D_1(0)$, weil $h(\Omega)$ offen ist.
Noch zu zeigen : h ist injektiv . Seien $z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$.

Sei $\alpha = h(z_1)$ und $\alpha_n = \psi_n(z_1)$. Aus dem Identitätssatz 2.27 folgt : es gibt eine Kreisscheibe $D \subset \Omega$ mit Mittelpunkt z_2, sodass $z_1 \notin \overline{D}$ und $h - \alpha$ auf ∂D keine Nullstelle besitzt. Da $\psi_n - \alpha_n$ auf $\overline{D}$ gleichmäßig gegen gegen $h - \alpha$ strebt, gilt

$$|\psi_n - \alpha_n - (h - \alpha)| < |h - \alpha|$$

auf ∂D, wenn nur n genügend groß ist. Weil alle ψ_n injektiv sind, hat $\psi_n - \alpha_n$ in D keine Nullstelle. Aus 2.77. folgt daher nun : die Anzahl der Nullstellen von $\psi_n - \alpha_n$ in D ist gleich der Anzahl der Nullstellen von $h - \alpha$ in D. Also hat $h - \alpha$ in D keine Nullstelle und es ist $h(z_1) \neq h(z_2)$. □

Korollar 4.35. *Sei $\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in \Omega$. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung $g : \Omega \longrightarrow D_1(0)$ mit $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0)$ reell, sowie $g'(z_0) > 0$. g ist durch die obigen Eigenschaften eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Existenz von g folgt sofort aus dem Beweis von 4.34, durch Multiplikation mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ kann man $g'(z_0) > 0$ erreichen.
Eindeutigkeit : sei h eine andere derartige Funktion.
Definiere $\phi = h \circ g^{-1} : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$. Dann ist $\phi(0) = h(g^{-1}(0)) = h(z_0) = 0$. Also ist nach 4.32

$$|\phi(z)| \leq |z| \ , \ \forall \ z \in D_1(0).$$

Sei $z = g(w)$. Dann ist $|h(g^{-1}(g(w)))| \leq |g(w)|$ also $|h(w)| \leq |g(w)|$. Durch Vertauschen der Rollen von g und h erhält man $|g(w)| \leq |h(w)|$. Somit ist $|h(w)| = |g(w)|$, $\forall \ w \in D_1(0) \Rightarrow |\phi(z)| = |z|$ auf $D_1(0)$ und wieder nach 4.32. $\phi(z) = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$.
Weiters ist

$$\phi'(0) = h'(g^{-1}(0)) \ (g^{-1})'(0) = h'(z_0) \ \frac{1}{g'(z_0)} > 0.$$

Da $\phi'(z) = \lambda$, folgt schließlich $\lambda = 1$, sowie $\phi(z) = z$ auf $D_1(0)$ und daher $h = g$. □

Bemerkung. Eine holomorphe Funktion $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt schlicht, wenn f injektiv ist und $f'(0) = 1$ sowie $f(0) = 0$. Die Taylorentwicklung einer schlichten Funktion f hat die Gestalt

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots .$$

Bieberbach'sche Vermutung (1914) : $|a_n| \leq n$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$. Bieberbach[6] selbst hat gezeigt, dass $|a_2| \leq 2$ ist; K. Löwner später $|a_3| \leq 3$ und $|a_4| \leq 4$.
1984 hat Louis De Branges die Bieberbach'sche Vermutung bewiesen.

Beispiel 4.36. Sei $H = \{z : \Im z > 0\}$ die obere Halbebene. Die Funktionen

$$h(z) = e^{it} \frac{z - i}{z + i} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

sind biholomorph Abbildungen der oberen Halbebene auf $D_1(0)$ mit $h(i) = 0$.

Der Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes ist nicht konstruktiv. Im allgemeinen ist es meist unmöglich, konkrete Formeln für biholomorphe Abbildungen einfach zusammenhängender Gebiete auf den Einheitskreis anzugeben und man muss sich mit Näherungsmethoden zufrieden geben.

[6]Bieberbach, Ludwig Moses (1886–1982)

4.9. Charakterisierung einfach zusammenhängender Gebiete

SATZ 4.37. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.*
Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent :
(a) Ω ist homöomorph zu $D_1(0)$ (d.h. es gibt eine bijektive in beiden Richtungen stetige Abbildung $\phi : \Omega \longrightarrow D_1(0)$);
(b) Ω ist einfach zusammenhängend;
(c) $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ für jeden geschlossenen Pfad γ in Ω und für jedes $\alpha \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$;
(d) $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist zusammenhängend;
(e) Jedes $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ kann durch Polynome gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen approximiert werden, d.h. für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ und für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein Polynom P mit $|f - P|_K < \epsilon$;
(f) $\forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und für jeden geschlossenen Pfad γ in Ω gilt :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0;$$

(g) $\forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega)\ \ \exists\ F \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $F' = f$, f besitzt eine Stammfunktion auf Ω;
(h) $\forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in \Omega$ existiert ein $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $e^g = f$, es existiert ein holomorpher Logarithmus von f;
(i) $\forall\ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in \Omega$ existiert ein $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $h^2 = f$, es existiert eine holomorphe Wurzel von f.

BEWEIS. (a) $\Rightarrow$ (b) : Sei $\phi : \Omega \longrightarrow D_1(0)$ ein Homöomorphismus und γ eine geschlossene Kurve in Ω. Dann definieren wir

$$H(s,t) = \phi^{-1}(t\phi(\gamma(s)))\ ,\ s,t \in [0,1].$$

$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ ist stetig und es gilt $H(s,0) = \phi^{-1}(0)$, $s \in [0,1]$ ist konstant und $H(s,1) = \gamma(s)$, $s \in [0,1]$, weiters ist $H(0,t) = H(1,t)$, $t \in [0,1]$. Also ist γ nullhomotop und Ω einfach zusammenhängend.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Satz 2.62

(c) $\Rightarrow$ (d) : Angenommen $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ ist nicht zusammenhängend, dann gibt es zwei nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen H, K von $\overline{\mathbb{C}}$ mit $H \cup K = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Ist $\infty \in H$, dann ist K kompakt in $\mathbb{C}$. Setzen wir $W = \mathbb{C} \setminus H$, dann ist $W = \Omega \cup K$. Nach 2.66 existiert nun ein Zyklus Γ in $W \setminus K = \Omega$ mit $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 1$, $\forall\ \alpha \in K$, was einen Widerspruch zu (c) ergibt.

(d) $\Rightarrow$ (e) : Korollar 4.15

(e) $\Rightarrow$ (f) : Sei $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, γ ein geschlossener Pfad in Ω, sowie $(p_n)_n$ eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig auf γ^* gegen f konvergieren. Polynome besitzen stets Stammfunktionen, daher ist

$$\int_\gamma p_n(z)\, dz = 0\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

und daher auch

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

(f) $\Rightarrow$ (g) : Satz 2.8

(g) $\Rightarrow$ (h) : Ist $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und $f(z) \neq 0$ auf Ω, dann ist $f'/f \in \mathcal{H}(\Omega)$ und besitzt eine Stammfunktion, nun verwende 2.30

(h) $\Rightarrow$ (i) : trivial.

(i) $\Rightarrow$ (a) : Ist $\Omega = \mathbb{C}$, dann vermittelt

$$\phi(z) = \frac{z}{1+|z|} \ , \ z \in \mathbb{C}$$

den gewüschten Homöomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $D_1(0)$.
Sei $\Omega \neq \mathbb{C}$. Im Beweis von 4.34 wird lediglich die Aussage von (i) verwendet, also folgt schon aus (i) die Existenz einer biholomorphen Abbildung $\phi : \Omega \longrightarrow D_1(0)$. $\square$

Bemerkung. Die Bedeutung des letzten Satzes liegt darin, dass der topologische Begriff des einfachen Zusammenhanges durch Eigenschaften holomorpher Funktionen charakterisiert wird.

4.10. Übungen

87) Sei $\Omega = \{z : |z| < 1 \text{ und } |2z-1| > 1\}$ und $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
(1) Existiert eine Folge von Polynomen P_n derart, dass $P_n \to f$ gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von Ω?
(2) Existiert eine solche Folge, welche gleichmäßig auf Ω gegen f konvergiert ?
(3) Ändert sich die Antwort auf (2), wenn vorausgesetzt wird, dass f holomorph in einer offenen Menge ist, welche den Abschluss von Ω enthält ?

88) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten in M auch die gesamte Verbindungsstrecke zwischen den Punkten in M liegt.
Man beweise, äquivalent dazu ist die Bedingung : für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ existiert eine Gerade $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : l((x,y)) = ax+by+c = 0\}$ mit $(x_0, y_0) \in g$ und $M \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : l((x,y)) < 0\}$. (Trennungseigenschaft)

89) Die konvexe Hülle $\tilde{K}$ von K ist die kleinste konvexe Menge, welche K enthält. Man zeige, dass

$$\tilde{K} = \{z \in \mathbb{C} : |e^{\alpha z}| \leq \sup_{w \in K} |e^{\alpha w}| \ \ , \ \forall \ \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

90) Es sei $U = \{z : |z| < 1\}$, $V = \{z : 0 < |z| < 1\}$, $K = \{z : |z| \leq 1/2\}$ und $L = \{z : |z| = 1/2\}$. Man bestimme : $\hat{K}_U, \hat{K}_{\mathbb{C}}, \hat{L}_U, \hat{L}_V$ und $\hat{L}_{\mathbb{C}}$. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für den Runge'schen Approximationssatz?

91) Man beweise: ein Gebiet G in $\mathbb{C}$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn für jede kompakte Teilmenge K von G gilt: $\hat{K}_G = \hat{K}_{\mathbb{C}}$.

92) Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine diskrete Folge in Ω, $P_k(z)$ sei der Hauptteil einer in einer Umgebung von a_k meromorphen Funktion, ferner D_k eine Folge disjunkter Kreisscheiben um $a_k, k \in \mathbb{N}$ und $\phi_k \in \mathcal{C}_0^\infty(D_k)$. Man setze

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k P_k$$

und korrigiere u mittels einer Lösung einer passenden inhomogenen Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichung zu einer auf $\Omega \setminus \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ holomorphen Lösung des Mittag–Leffler Problems.

93) Wo konvergieren die folgenden unendlichen Produkte absolut :

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n); \quad \prod_{n=1}^{\infty}\cos z/n; \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin z/n}{z/n};$$
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^z}\right); \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right) \ ?$$

94) Man konstruiere eine meromorphe Funktion mit Polen in den Punkten $z_k = ik^2,\ k \in \mathbb{N}$ und dazugehörigen Hauptteilen
$$\frac{k}{z-ik^2},\ k \in \mathbb{N}.$$

95) Man finde die sogenannten Partialbruchreihen für die Funktionen
$$f(z) = \frac{1}{\sin z}\ ,\ g(z) = \frac{1}{\cos z}\ ,\ h(z) = \frac{1}{1-e^z},$$
d.h. man stelle die obigen Funktionen als Summen ihrer Hauptteile dar, wobei unter Umständen auf konvergenzerzeugende Summanden im Sinne des Satzes von Mittag–Leffler zu achten ist.

96) Man zeige : jeder holomorphe Automorphismus ϕ des Einheitskreises ist von der Gestalt
$$\phi(z) = \lambda\,\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},$$
wobei $\alpha \in D_1(0)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Konstante mit $|\lambda| = 1$ ist. Hinweis : verwende das Schwarz'sche Lemma.

KAPITEL 5

Harmonische Funktionen

5.1. Definition und wichtige Eigenschaften

Definition 5.1. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine im reellen Sinne zweimal stetig differenzierbare Funktion. u heißt harmonisch auf G, wenn $\Delta u = 0$ auf G. ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ oder $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$)

Beispiel 5.2. (a) Lineare Polynome sind immer harmonisch.
$f(x, y) = x^2$ ist nicht harmonisch. Jedoch $u(x, y) = x^2 - y^2$ ist harmonisch, desgleichen ist $v(x, y) = 2xy$ harmonisch. Ist $p(z) = z^2$, $z = x + iy$, so ist $\Re p(x, y) = x^2 - y^2$ und $\Im p(x, y) = 2xy$.
(b) Ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und $f = u + iv$, dann gelten die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Differentiation nach x bzw. nach y ergibt $u_{xx} = v_{yx}$, $u_{yy} = -v_{xy}$ und daher $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ähnlich folgt $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Also sind u und v harmonisch auf G.
(c) Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $h(x, y) = 1/2 \log(x^2 + y^2)$. Es ist $h_x = \frac{x}{x^2+y^2}$ und

$$h_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \ , \ h_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Also ist $\Delta h = 0$ auf G.

Definition 5.3. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch auf G. Eine harmonische Funktion $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt zu u konjugiert harmonisch, wenn $f = u + iv \in \mathcal{H}(G)$ (hier fassen wir G als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf).

Bemerkung. Ist $f \in \mathcal{H}(G)$, dann sind $\Re f$ und $\Im f$ konjugiert harmonisch.

Satz 5.4. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet.*
G ist einfach zusammenhängend $\Leftrightarrow$ für jede harmonische Funktion u auf G existiert eine harmonische Funktion v auf G, die zu u konjugiert harmonisch ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Sei G zunächst ganz $\mathbb{R}^2$ oder $D_1(0)$. Ist $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, so definieren wir

$$v(x, y) = \int_0^y u_x(x, t)\, dt - \int_0^x u_y(s, 0)\, ds,$$

dann ist $v_y(x, y) = u_x(x, y)$ und

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= \int_0^y u_{xx}(x, t)\, dt - u_y(x, 0) = -\int_0^y u_{yy}(x, t)\, dt - u_y(x, 0) \\ &= -u_y(x, y) + u_y(x, 0) - u_y(x, 0) = -u_y(x, y). \end{aligned}$$

Es gelten also die Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen und daher ist $f = u+iv \in \mathcal{H}(G)$.
Ist nun $G \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, dann existiert nach 4.34. eine biholomorphe Abbildung $h : G \longrightarrow D_1(0)$.
Sei $u_1 = u \circ h^{-1} : D_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist u_1 harmonisch, wie man leicht überprüft. Daher existiert nach dem ersten Teil des Beweises eine harmonische Funktion $v_1 : D_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}$, die zu u_1 konjugiert harmonisch ist. Es ist also $f_1 = u_1 + iv_1 \in \mathcal{H}(D_1(0))$.
Sei $f = f_1 \circ h : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und $\Re f = u$. Setze nun für $v = \Im f$, dann ist v konjugiert harmonisch zu u auf G.

($\Leftarrow$) Sei $f \in \mathcal{H}(G)$ und $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in G$. Wir zeigen : f besitzt eine holomorphen Logarithmus auf G. Dann folgt nach 4.37, dass G einfach zusammenhängend ist.
Dazu zerlegen wir $f = u + iv$ und definieren

$$U(x, y) = 1/2\ \log(u^2(x, y) + v^2(x, y)) = \log |f(z)|.$$

Dann ist $U : G \longrightarrow \mathbb{R}$ und nach Beispiel 5.2 (c) ist U harmonisch auf G.
Nach Voraussetzung existiert nun eine harmonische Funktion $V : G \longrightarrow \mathbb{R}$, die zu U konjugiert harmonisch ist, d.h. $g = U + iV \in \mathcal{H}(G)$. Sei $h = \exp(g)$. Dann gilt

$$\left|\frac{f(z)}{h(z)}\right| = \frac{|f(z)|}{\exp(\Re g(z))} = \frac{|f(z)|}{\exp(\log |f(z)|)} = \left|\frac{f(z)}{f(z)}\right| = 1\ , \forall\ z \in G.$$

Weiters ist $f/h \in \mathcal{H}(G)$. Da $|f/h| = 1$ auf G, kann f/h nicht offen sein und daher ist nach 2.47 $f = ch$, wobei $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante ist. Also besitzt f einen holomorphen Logarithmus auf G. □

Satz 5.5 (Mittelwerteigenschaft). *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $h : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Sei $a \in G$ und $R > 0$ derart, dass $\overline{D_R(a)} \subset G$. Dann gilt*

$$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + Re^{it})\, dt.$$

Beweis. Wir wählen ein $R' > R$ mit $D_{R'}(a) \subset G$. Nach 5.4 existiert eine harmonische Funktion g auf $D_{R'}(a)$, die zu h konjugiert harmonisch ist. Also ist die Funktion $f = h+ig \in \mathcal{H}(D_{R'}(a))$.
Sei nun $\gamma_R(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann folgt aus der Cauchy'schen Integralformel

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it})\, dt.$$

Übergang zum Realteil liefert das gewünschte Resultat. □

Bemerkung. Wir werden später sehen, dass auch eine Art Umkehrung dieses Satzes gilt.

Beispiel 5.6. Wir betrachten eine idealisierte Strömung einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeitsvektor:

$$v(z) = v_1(x, y) + iv_2(x, y),$$

$z \in G \subseteq \mathbb{R}^2$, G einfach zusammenhängend.
Die Strömung soll in G frei von Quellen und Wirbeln sein, d.h.

$$\text{div } v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \tag{5.1}$$

$$\text{rot } v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \tag{5.2}$$

Aus (5.2) folgt : $\exists\ \Phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ (Geschwindigkeitspotential) mit grad $\Phi = v$, d.h.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_1 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_2.$$

Nun impliziert (5.1) : $\Delta\Phi = 0$, also ist Φ harmonisch.
Umgekehrt läss t sich jede Lösung von $\Delta\Phi = 0$ als Geschwindigkeitspotential einer quellen– und wirbelfreien Strömung deuten.
Nach 5.4 existiert eine zu Φ konjugiert harmonische Funktion Ψ auf G. Man nennt $F = \Phi + i\Psi \in \mathcal{H}(G)$ das komplexe Geschwindigkeitspotential. Aus 1.17 und den Cauchy–Riemann'schen Differentialgleichungen folgt nun

$$F'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_1 - iv_2,$$

also ist $v = \overline{F'}$.

5.2. Das Dirichlet–Problem

Es sei $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion . Gesucht ist eine auf $\overline{D_1(0)}$ stetige Funktion u, die im Inneren von $D_1(0)$ harmonisch ist und auf $\mathbb{T}$ mit g übereinstimmt (man nennt u Lösung des Dirichlet[1]–Problems mit Randbedingung g).

Definition 5.7. Sei $a \in \mathbb{C},\ R > 0\ ,\ z \in D_R(a)$.

$$P_{a,R}(z,t) = \Re\left(\frac{Re^{it} + (z-a)}{Re^{it} - (z-a)}\right)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

heißt <u>Poisson–Kern</u>[2] für $D_R(a)$. Ist $\Phi : \partial D_R(a) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann nennt man

$$P_{a,R}(\Phi)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{a,R}(z,t)\Phi(a + Re^{it})\,dt\ ,\ z \in D_R(a)$$

das <u>Poisson–Integral</u> von Φ.

Bemerkung. Sei $a = 0\ ,\ R = 1$: wir setzen

$$P(z) = P_{0,1}(z,0) = \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\ ,\ |z| < 1.$$

Für $z = re^{i\theta}$ ist

$$P_r(\theta) = P(re^{i\theta}) = \Re\left(\frac{1 + r\cos\theta + ir\sin\theta}{1 - r\cos\theta - ir\sin\theta}\right) = \Re\left(\frac{1 - r^2 + 2ri\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\right)$$
$$= \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Da für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{1+z}{1-z} = (1+z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n,$$

[1] Dirichlet, Gustav Peter Lejeune (1805–1859)
[2] Poisson, Siméon Denis (1781–1840)

folgt

$$P_r(\theta) = \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Setzt man für $z \in D_r(a) \ : \ z = a + re^{i\theta}\ ,\ r < R$, so ist

$$P_{a,R}(z,t) = P(r/R\ e^{i(\theta-t)}).$$

Lemma 5.8. *Der Poisson–Kern $P_{a,R}(z,t)$ ist harmonisch als Funktion in $z \in D_R(a)$, bei fixem t. Weiters ist $P_{a,R}(z,t) > 0\ ,\ \forall\ z \in D_R(a)\ ,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Für jedes r mit $0 \le r < R$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{a,R}(a + re^{i\theta}, t)\, d\theta = 1.$$

Beweis. $P_{a,R}(z,t)$ ist Realteil der in z holomorphen Funktion

$$z \mapsto \frac{Re^{it} + (z-a)}{Re^{it} - (z-a)}$$

für $z \in D_R(a)$ und daher dort harmonsich.
Setze für $\rho = r/R$, dann ist

$$P_{a,R}(z,t) = P(\rho e^{i(\theta-t)}) = P_\rho(\theta - t) = \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta-t) + \rho^2},$$

Da $1-2\rho\cos(\theta-t)+\rho^2 \ge 1-2\rho+\rho^2 = (1-\rho)^2 > 0$, folgt $P_{a,R}(z,t) > 0\ ,\ \forall\ z \in D_R(a)\ ,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$.
Weiters ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\rho(\theta - t)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho^{|n|} e^{-int} \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\, 2\pi = 1.$$

□

Lemma 5.9. *Sei $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ und $0 < \delta < \pi/2$. Dann gilt für $\delta \le \theta \le 2\pi - \delta$*

$$0 < P_r(\theta) \le \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta}\ ,\ \forall\ r,\ \ 0 \le r < 1.$$

Insbesondere strebt $P_r(\theta)$ bei $r \to 1$ gegen 0, und zwar gleichmäßig in θ mit $\delta \le \theta \le 2\pi - \delta$.

Beweis. Ist $\pi/2 \le \theta \le 3\pi/2$, dann ist $\cos\theta \le 0$ und daher $1 - 2r\cos\theta + r^2 \ge 1$, somit gilt

$$P_r(\theta) \le 1 - r^2 \le \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta}.$$

Ist $\delta \le \theta \le \pi/2$, so folgt $0 \le \cos\theta \le \cos\delta$ und daher

$$1 - 2r\cos\theta + r^2 \ge 1 - 2r\cos\delta + r^2 = (1-\cos^2\delta) + (r-\cos\delta)^2 \ge 1 - \cos^2\delta.$$

Also gilt wieder

$$P_r(\theta) \le \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta}.$$

Ist $3\pi/2 \le \theta \le 2\pi - \delta$, so ist $0 \le \cos\theta \le \cos(2\pi-\delta) = \cos\delta$ und es folgt wieder

$$P_r(\theta) \le \frac{1-r^2}{1-\cos^2\delta}.$$

□

Satz 5.10 (Lösung des Dirichlet–Problems). *Sei $\Phi : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $z \in D_1(0),\ z = re^{i\theta}$, sei*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\Phi(e^{it})\, dt$$

und auf $\mathbb{T}$ sei $u(e^{it}) = \Phi(e^{it})$.
Dann ist $u : \overline{D_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Dirichlet–Problems mit Randbedingung Φ.

Beweis. Wir zeigen zunächst : u ist harmonisch auf $D_1(0)$.

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) \Phi(e^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi}\Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\Phi(e^{it})\, dt\right).$$

Der Integrand ist holomorph in $z \in D_1(0)$ und kann in eine Taylorreihe entwickelt werden, bei der Integration nach t bleibt die Holomorphie erhalten. Daher ist u Realteil einer holomorphen Funktion und somit harmonisch auf $D_1(0)$.
Wegen 5.8 haben wir

$$\begin{aligned} u(z) - \Phi(e^{it_0}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\Phi(e^{it})\, dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\Phi(e^{it_0})\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)(\Phi(e^{it}) - \Phi(e^{it_0}))\, dt. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Wir betrachten nun den Grenzübergang $z \to e^{it_0}$.
Φ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{T}$, daher existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|\Phi(e^{it}) - \Phi(e^{it_0})| < \epsilon,$$

wenn $|e^{it} - e^{it_0}| < \delta$, dabei ist δ unabhängig von t und t_0.
Sei $z = re^{i\theta}$. Ist $|e^{it} - e^{it_0}| \geq \delta$, dann gilt

$$|e^{i(t-\theta)} - 1| \geq \delta/2,$$

wenn θ genügend nahe bei t_0 liegt , denn $e^{i(t-\theta)} - 1 = e^{-i\theta}(e^{it} - e^{i\theta})$, also ist

$$|e^{i(t-\theta)} - 1| = |e^{it} - e^{i\theta}|.$$

Wir zerlegen nun (5.3) in zwei Summanden :

$$\begin{aligned} u(z) - \Phi(e^{it_0}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)(\Phi(e^{it}) - \Phi(e^{it_0}))\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{|e^{it}-e^{it_0}|\geq\delta} P_r(\theta-t)(\Phi(e^{it}) - \Phi(e^{it_0}))dt \\ &\qquad + \int_{|e^{it}-e^{it_0}|<\delta} P_r(\theta-t)(\Phi(e^{it}) - \Phi(e^{it_0}))dt\Big) \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Wir schätzen zuerst den zweiten Summanden ab, nach 5.8 gilt

$$|II| \leq \frac{1}{2\pi}\epsilon \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, dt = \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

Zur Abschätzung des ersten Summanden verwenden wir 5.9, dabei gilt $\delta' \le (t-\theta) \le 2\pi - \delta'$ für ein $\delta' > 0$, das nur von δ abhängt (wir wissen $|e^{i(t-\theta)} - 1| \ge \delta/2$, wenn θ genügend nahe bei t_0 liegt)

$$\begin{aligned}|I| &\le \frac{1}{2\pi} C(\delta)\ (1-r^2) \int_{|e^{it}-e^{it_0}|\ge\delta} |\Phi(e^{it}) - \Phi(e^{it_0})|\, dt \\ &\le C'(\delta)\ (1-r^2) \int_0^{2\pi} |\Phi(e^{it}) - \Phi(e^{it_0})|\, dt \\ &\le C'(\delta)\ (1-r^2)\ M,\end{aligned}$$

wobei die Konstante $M > 0$ nur von Φ abhängt. Führen wir nun den Grenzübergang $z = re^{i\theta} \to e^{it_0}$, so strebt insbesondere $r \to 1$, und daher geht I gegen 0. Somit gilt

$$\lim_{z \to e^{it_0}} u(z) = \Phi(e^{it_0}),$$

d.h. u ist stetig auf $\overline{D}_1(0)$. $\square$

Korollar 5.11. *Ist $\Phi : \partial D_R(a) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist*

$$u(z) = P_{a,R}(\Phi)(z)\ ,\ z \in D_R(a),$$

$u(z) = \Phi(z)\ ,\ z \in \partial D_R(a)$ *Lösung des Dirichlet–Problems für $D_R(a)$ mit Randbedingung Φ.*

Bemerkung 5.12. Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $G \ne \mathbb{C}$, dessen Rand eine stückweise glatte, doppelpunktfreie Kurve ist, dann hat die biholomorphe Abbildung $\psi : G \longrightarrow D_1(0)$ eine stetige Fortsetzung auf den Rand $\psi : \overline{G} \longrightarrow \overline{D_1(0)}$ mit $\psi(\partial G) = \mathbb{T}$. (siehe [**10**])

Ist nun $g : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist $g^* = g \circ \psi^{-1} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{T}$. Für dieses g^* als Randbedingung können wir das Dirichlet–Problem lösen (5.10):

$$u^*(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{0,1}(w,t) g^*(e^{it})\, dt\ ,\ w \in D_1(0),$$

dann ist $u(z) = u^*(\psi(z))\ ,\ z \in G$, harmonisch auf G und für $z \in \partial G$ gilt

$$u(z) = u^*(\psi(z)) = g^*(\psi(z)) = g(\psi^{-1}(\psi(z))) = g(z),$$

also ist u Lösung des Dirichlet–Problems auf G mit Randbedingung g.

Sei G die obere Halbebene $H = \{\zeta = \sigma + i\tau : \tau > 0\}$ und $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion.

Wir suchen eine stetige Funktion $W : \overline{H} \longrightarrow \mathbb{R}$, die harmonisch auf H ist und auf $\partial H = \mathbb{R}$ mit w übereinstimmt.

Die Riemann'sche Abbildungsfunktion $\psi : H \longrightarrow D_1(0)$ ist $\psi(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}\ ,\ \zeta \in H$. Führt man alle Transformationen wie oben durch, so erhält man

$$W(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \frac{\tau}{(t-\sigma)^2 + \tau^2}\, dt\ ,\ \zeta = \sigma + i\tau.$$

5.3. Die Formel von Jensen

DEFINITION 5.13. Eine stetige Funktion $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ besitzt die Mittelwerteigenschaft , wenn für jedes $z \in \Omega$ eine Folge $(r_n)_n$ positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ existiert, sodass

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + r_n e^{it})\,dt\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

BEMERKUNG. Aus 5.5 folgt, dass harmonische Funktionen die Mittelwerteigenschaft besitzen. Nun beweisen wir die Umkehrung.

SATZ 5.14. *Sei $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Mittelwerteigenschaft. Dann ist u harmonisch auf Ω.*

BEWEIS. Sei $a \in \Omega$ und $R > 0$ mit $\overline{D_R(a)} \subset \Omega$. Nach 5.11 ist das Poissonintegral

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{Re^{it} + (z-a)}{Re^{it} - (z-a)}\right) u(a + Re^{it})\,dt$$

eine auf $\overline{D_R(a)}$ stetige Funktion, die auf $D_R(a)$ harmonisch ist und auf $\partial D_R(a)$ gleich u ist. Sei nun $v = u - h$ und $m = \sup\{v(z) : z \in \overline{D_R(a)}\}$. Angenommen $m > 0$: sei $E = \{z \in \overline{D_R(a)} : v(z) = m\}$, da $v = 0$ auf $\partial D_R(a)$, ist E eine kompakte Teilmenge von $D_R(a)$, also existiert ein $z_0 \in E$ mit $|z_0 - a| \geq |z - a|\ ,\ \forall\ z \in E$. Nun liegt für jedes genügend kleine $r > 0$ mindestens der halbe Kreis $D_r(z_0)$ außerhalb von E. Die Funktion v besitzt die Mittelwerteigenschaft, der Mittelwert von v über die Kreislinie $\partial D_r(z_0)$ ist jedoch kleiner als $v(z_0) = m$, Widerspruch! Also muss $m = 0$ und $v \leq 0$ auf $\overline{D_R(a)}$.
Das gleiche Argument für $-v$ liefert $v \geq 0$ und hiermit $u = h$ auf $\overline{D_R(a)}$. Somit ist u harmonisch auf Ω. □

LEMMA 5.15.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1 - e^{i\theta}|\,d\theta = 0$$

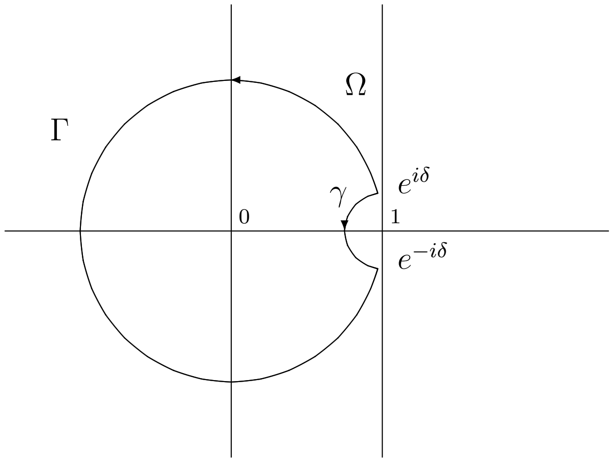
BEWEIS. Sei $\Omega = \{z : \Re z < 1\}$. Dann gilt $1 - z \neq 0\ ,\ \forall\ z \in \Omega$, da Ω einfach zusammenhängend ist, folgt aus 4.37 die Existenz einer holomorphen Funktion $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ mit $\exp h(z) = 1 - z\ ,\forall\ z \in \Omega$. Durch die Festsetzung $h(0) = 0$ ist h eindeutig bestimmt. Es gilt

$$1 - z = e^{\Re h(z)}\left(\cos(\Im h(z)) + i\sin(\Im h(z))\right),$$

und da $\Re(1 - z) > 0\ ,\ \forall\ z \in \Omega$, folgt

$$\Re h(z) = \log|1 - z| \quad \text{und} \quad |\Im h(z)| < \pi/2.$$

Für ein kleines $\delta > 0$ sei Γ der Pfad $\Gamma(t) = e^{it}\ ,\ \delta \leq t \leq 2\pi - \delta$ und γ die Kreislinie von $e^{i\delta}$ nach $e^{-i\delta}$ in Ω.



Nun gilt nach der Cauchy'schen Integralformel

$$0 = h(0) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\Gamma \frac{h(z)}{z}\,dz - \int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = \Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right) = \Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right).$$

Die Länge von γ ist kleiner als $\pi\delta$, und wir können nunmehr folgendermaßen abschätzen

$$\left|\Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right)\right| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h(z)}{z}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\,\pi\delta\,\sup_{z\in\gamma^*}\left|\frac{h(z)}{z}\right|$$

$$\le C\delta\left[(\log|1-1-\delta e^{it}|)^2 + (\pi/2)^2\right]^{1/2} \le C'(\delta|\log\delta| + \delta),$$

der letzte Ausdruck strebt bei $\delta \to 0$ gegen 0, was die Behauptung ergibt. □

Satz 5.16 (Jensen'sche Formel). [3]
Sei $f \in \mathcal{H}(D_R(0))$, $f(0) \neq 0$, $0 < r < R$, *weiters seien* $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ *die Nullstellen von* f *in* $\overline{D_r(0)}$, *wobei die Vielfachheiten von Nullstellen mitgezählt werden. Dann gilt*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^N \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\}.$$

Bemerkung. Ist $f(0) = 0$ mit der Ordnung k, dann betrachte man an Stelle von f die Funktion $f(z)/z^k$.

Beweis. Ordne die Nullstellen α_j so, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r(0)$ und $|\alpha_{m+1}| = \cdots = |\alpha_N| = r$. Setze

$$g(z) = f(z)\prod_{n=1}^m \frac{r^2 - \overline{\alpha_n}z}{r(\alpha_n - z)}\prod_{n=m+1}^N \frac{\alpha_n}{\alpha_n - z},$$

[3] Jensen, Johan Ludwig William Valdemar (1859–1925)

dann ist $g \in \mathcal{H}(D)$, wobei $D = D_{r+\epsilon}(0)$ für ein $\epsilon > 0$. Weiters kann $\epsilon > 0$ so gewählt werden, dass g keine Nullstelle in D hat. Nach Abschnitt 5.1. ist dann $\log|g|$ harmonisch auf D, und 5.5 ergibt

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|\, d\theta. \tag{5.4}$$

Weiters gilt

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|\alpha_n|}. \tag{5.5}$$

Eine einfache Rechnung zeigt : für $1 \le n \le m$ und für $|z| = r$ gilt $|\frac{r^2 - \overline{\alpha_n} z}{r(\alpha_n - z)}| = 1$.
Setze nun $\alpha_n = re^{i\theta_n}$ für $m < n \le N$. Aus der Definition von g folgt

$$\log|g(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N} \log|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}|. \tag{5.6}$$

Integriert man (5.6) nach θ von 0 bis 2π und verwendet dabei 5.15, so erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Setzt man dies in (5.4) ein und berücksichtigt (5.5), so folgt die Jensen'sche Formel. □

Korollar 5.17. *Sei $f \in \mathcal{H}(D_R(0))$ und $0 < \rho < R$, weiters sei $f(0) = 0$ mit der Ordnung λ (dabei bedeutet $\lambda = 0$: $f(0) \neq 0$). Ferner sei $n(\rho)$ die Anzahl der Nullstellen von f in $D_\rho(0)$, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden und sei*

$$M(\rho) = \max_{0 \le \theta \le 2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| = \sup_{z \in D_\rho(0)} |f(z)|.$$

Dann gilt

$$\frac{\rho^{n(\rho)}}{|\alpha_1| \dots |\alpha_{n(\rho)}|} \le \frac{M(\rho)}{|f^{(\lambda)}(0)/\lambda!|\ \rho^\lambda}.$$

Beweis. Aus 5.16 folgt für $f(z)/z^\lambda$ an Stelle von f

$$\log|f^{(\lambda)}(0)/\lambda!| + \log\left(\rho^\lambda \prod_{k=1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|\alpha_k|}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{i\theta})|\, d\theta \le \log M(\rho).$$

□

Bemerkung. Das letzte Resultat beschreibt einen sehr wichtigen Zusammenhang zwischen der Nullstellenverteilung und dem Größenwachstum einer holomorphen Funktion.

ANHANG A

Der Satz von Hahn–Banach

Wir betrachten einen normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$. Ein lineares Funktional $L : X \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig (beschränkt), falls

$$\|L\| = \sup\{|L(x)| : \|x\| \leq 1\} < \infty;$$

es gilt dann

$$|L(x)| \leq \|L\| \, \|x\| \ , \ \forall\, x \in X.$$

Satz A.1 (Satz von Hahn–Banach). *Sei $(X, \|\,.\,\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und Y ein Teilraum von X. Weiters sei $l : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf Y mit*

$$l(x) \leq C\|x\| \ , \ \forall\, x \in Y,$$

dabei ist $C > 0$ eine Konstante.
Dann existiert eine lineare Fortsetzung L von l auf ganz X, d.h. $L|_Y = l$, mit

$$L(x) \leq C\|x\| \ , \ \forall\, x \in X.$$

Beweis. Sei $x_0 \notin Y$ und $Z = \langle Y, x_0 \rangle$ das lineare Erzeugnis von Y und x_0. Ist $x \in Z$, dann folgt $x = y + cx_0$, $y \in Y$, $c \in \mathbb{R}$ und die Darstellung von x ist auch eindeutig.
Wir setzen $\phi(x) = l(y) + ca_0$ für ein $a_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist ϕ eine Fortsetzung von l auf Z. Nun zeigen wir, a_0 kann so gewählt kann, dass $\phi(x) \leq C\|x\|$, $\forall\, x \in Z$, d.h.

$$ca_0 \leq C\|y + cx_0\| - l(y). \tag{A.1}$$

Für $c = 0$ ist (A.1) immer erfüllt. Ist $c > 0$, so ist (A.1) äquivalent zu $a_0 \leq C\|\frac{y}{c} + x_0\| - l(\frac{y}{c})$; ist $c < 0$, so ist (A.1) äquivalent zu $a_0 \geq -C\| - \frac{y}{c} - x_0\| - l(\frac{y}{c})$. Wir müssen also zeigen, es existiert ein a_0 mit

$$-C\| - y - x_0\| - l(y) \leq a_0 \leq C\|y + x_0\| - l(y) \ , \ \forall\, y \in Y. \tag{A.2}$$

Seien dazu $y_1, y_2 \in Y$. Dann gilt

$$l(y_2) - l(y_1) = l(y_2 - y_1) \leq C\|(y_2 + x_0) + (-y_1 - x_0)\| \leq C(\|y_2 + x_0\| + \| - y_1 - x_0\|),$$

und daraus folgt

$$-C\| - y_1 - x_0\| - l(y_1) \leq C\|y_2 + x_0\| - l(y_2) \ , \ \forall\, y_1, y_2 \in Y,$$

somit existiert ein $a_0 \in \mathbb{R}$ mit (A.2). Wir haben daher eine lineare Fortsetzung ϕ von l auf Z gefunden derart, dass

$$\phi(x) \leq C\|x\| \ , \ \forall\, x \in Z.$$

Sei nun $\mathcal{E}$ die Menge aller linearen Fortsetzungen λ von l, die auf ihrem Definitionsbereich $\mathrm{dom}(\lambda)$ von $C\|\cdot\|$ dominiert werden.
Auf $\mathcal{E}$ definieren wir nun eine partielle Ordnung : für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{E}$ sei

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 \text{ ist eine Fortsetzung von } \lambda_1 \ , \ \mathrm{dom}(\lambda_1) \subseteq \mathrm{dom}(\lambda_2).$$

Es gilt : ist $\lambda_1 \leq \lambda_2$ und $\lambda_2 \leq \lambda_3$, dann ist $\lambda_1 \leq \lambda_3$; für jedes $\lambda \in \mathcal{E}$ gilt $\lambda \leq \lambda$. Ist ferner $\lambda_1 \leq \lambda_2$ und $\lambda_2 \leq \lambda_1$, dann ist $\lambda_1 = \lambda_2$.
Sei nun $\mathcal{F}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{E}$, d.h. für jedes Paar $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}$ gilt $\lambda_1 \leq \lambda_2$ oder $\lambda_2 \leq \lambda_1$.
Wir definieren jetzt ein lineares Funktional

$$U : \bigcup_{\lambda \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}(\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch $U(x) = \lambda(x)$, wenn $x \in \mathrm{dom}(\lambda)$. U ist wohldefiniert, da $\mathcal{F}$ total geordnet ist. U ist auch eine Fortsetzung von l und es gilt

$$U(x) \leq C\|x\| \ , \ \forall \ x \in \mathrm{dom}(U).$$

Also ist $U \in \mathcal{E}$ und U ist eine obere Schranke von $\mathcal{F}$.

Lemma von Zorn: Sei $\mathcal{E}$ eine nichtleere partiell geordnete Menge, in welcher jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Dann enthält $\mathcal{E}$ mindestens ein maximales Element.
Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Die Voraussetzungen des Zorn'schen Lemmas sind in unserem Fall erfüllt, also existiert ein maximales Element L in $\mathcal{E}$.
Angenommen $\mathrm{dom}(L) = M \neq X$, dann existiert ein $x_0 \in X \setminus M$ und eine Fortsetzung von L auf $\langle M, x_0 \rangle$ mit den erforderlichen Eigenschaften, was ein Widerspruch zur Maximalität von L ist. □

Satz A.2. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$ und Y ein Teilraum von X. Weiters sei $l : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ ein lineares Funktional auf Y mit*

$$|l(x)| \leq C\|x\| \ , \ \forall \ x \in Y,$$

dabei ist $C > 0$ eine Konstante.
Dann existiert eine lineare Fortsetzung L von l auf ganz X, d.h. $L|_Y = l$, mit

$$|L(x)| \leq C\|x\| \ , \ \forall \ x \in X.$$

Beweis. Sei $l_1(x) = \Re l(x)$. l ist nun komplex linear. Es gilt $il(x) = l(ix) = l_1(ix) + i\Im l(ix)$ und andererseits $il(x) = i(l_1(x) + i\Im l(x)) = -\Im l(x) + il_1(x)$, somit ist $\Im l(x) = -l_1(ix)$.
l_1 ist ein reell lineares Funktional auf Y und es folgt aus der Voraussetzung

$$|l_1(y)| \leq C\|y\| \ , \ \forall \ y \in Y.$$

Daher existiert nach A.1. eine reell lineare Fortsetzung L_1 von l_1 auf ganz X mit $|L_1(x)| \leq C\|x\| \ , \ \forall \ x \in X$.
Die Überlegungen zu Beginn des Beweises legen nun den folgenden Ansatz nahe :

$$L(x) = L_1(x) - iL_1(ix) \ , \ x \in X.$$

L ist zunächst reell linear und es gilt

$$L(ix) = L_1(ix) - iL_1(-x) = i[L_1(x) - iL_1(ix)] = iL(x),$$

also ist L auch komplex linear. Weiters gilt für $y \in Y$

$$L(y) = L_1(y) - iL_1(iy) = l_1(y) - il_1(iy) = l(y),$$

daher ist L eine Fortsetzung von l.

Sei nun $L(x) = |L(x)|e^{i\theta}$. Dann ist

$$|L(x)| = e^{-i\theta}L(x) = L(e^{-i\theta}x) = L_1(e^{-i\theta}x) \leq C\|e^{-i\theta}x\| = C\|x\|.$$

$\square$

Satz A.3. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$, $x_0 \in X$ und Y ein Teilraum von X.*
x_0 liegt genau dann in $\overline{Y}$, wenn es kein stetiges lineares Funktional L auf X gibt mit $L(x) = 0$, $\forall\, x \in Y$ aber $L(x_0) \neq 0$.

Beweis. Ist $x_0 \in \overline{Y}$ und L ein stetiges lineares Funktional auf X mit $L(x) = 0$, $\forall\, x \in Y$, dann folgt aus der Stetigkeit von L auch $L(x_0) = 0$.
Ist hingegen $x_0 \notin \overline{Y}$, dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\|x - x_0\| > \delta$, $\forall\, x \in Y$. Sei $Z = \langle Y, x_0\rangle$ und definiere $l(x + cx_0) = c$ für $x \in Y$ und $c \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\delta|c| \leq |c|\ \|x_0 + c^{-1}x\| = \|cx_0 + x\|,$$

und daher ist

$$|l(x + cx_0)| = |c| \leq \delta^{-1}\|x + cx_0\|,$$

d.h. $|l(z)| \leq \delta^{-1}\|z\|$, $\forall\, z \in Z$. Weiters ist nach Definition $l(x) = 0$, $\forall\, x \in Y$ und $l(x_0) = 1$.
Nach A.2 existiert eine Fortsetzung L von l auf ganz X mit

$$|L(x)| \leq \delta^{-1}\|x\| \ ,\ \forall\, x \in X,$$

diese Fortsetzung ist daher auch stetig. $\square$

Korollar A.4. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$ und Y ein Teilraum von X. Der Teilraum Y liegt genau dann dicht in X, wenn jedes stetige lineare Funktional auf X, das auf Y verschwindet, auch auf ganz X Null ist.*

Literaturverzeichnis

1. M.J. Ablowitz and A.S. Fokas, *Complex variables, introduction and applications*, Cambridge University Press, 1997.
2. L. Ahlfors, *Complex Analyis*, Mc Graw–Hill, Princeton, N.J., 1979.
3. N.H. Asmar, *Applied complex analysis with partial differential equations*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2002.
4. C.A. Berenstein and R. Gay, *Complex Analysis*, Springer Verlag, New York, 1991.
5. R.B. Burckel, *An introduction to classical complex analysis*, Birkhäuser Verlag, 1979.
6. J.B. Conway, *Functions of one complex variable I*, Springer Verlag, New York, 1978.
7. ———, *Functions of one complex variable II*, Springer Verlag, New York, 1995.
8. J. Elstrodt, *Maß -und Integrationstheorie*, Springer–Verlag, 1996.
9. W. Fischer and I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1992.
10. ———, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1998.
11. S.D. Fisher, *Complex variables*, 2nd. ed., Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1990.
12. H. Grauert and K. Fritzsche, *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
13. P. Henrici, *Applied and computational complex analyis I, II, III*, John Wiley & Sons, New York, London, 1985.
14. E. Hille, *Analytic function theory I*, Chelsea Publishing Company, New York, 1974.
15. L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North–Holland, Amsterdam, 1990.
16. K. Jänich, *Einführung in die Funktionentheorie*, Springer–Verlag, Berlin, 1993.
17. G.A. Jones and D. Singerman, *Complex functions, an algebraic and geometric viewpoint*, Cambridge University Press, 1987.
18. S.G. Krantz, *Function theory of several complex variables*, 2nd. ed., Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1992.
19. S. Lang, *Complex analysis*, Addison–Wesley, 1977.
20. M.A. Lawrentjew and B.W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, VEB–Verlag, 1967.
21. B. Luecking and L.A. Rubel, *Complex analysis, a functional analysis approach*, Springer–Verlag, 1981.
22. A.I. Markushevich, *Theory of functions*, Chelsea Publishing Company, 1977.
23. T.O. Moore and E.H. Hadlock, *Complex analysis*, World Scientific, 1991.
24. R. Narasimhan, *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser–Verlag, 1985.
25. B.P. Palka, *An introduction to complex function theory*, Springer–Verlag, 1991.
26. R.M. Range, *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Springer–Verlag, 1986.
27. R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
28. ———, *Funktionentheorie II*, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
29. W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw–Hill, 1987.
30. E.B. Saff and A.D. Snider, *Fundamentals of complex analysis with applications to engineering and science*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2003.

Index