Name (Familien- und Vor-):
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (16.11.2001)

(1) Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ schneidet die x–Achse an den Stellen -2 und 4 und hat im Schnittpunkt mit der positiven x–Achse die Steigung -2. Eine Polynomfunktion g hat die Funktion f als Ableitungsfunktion und an der Stelle 1 eine Nullstelle.
   (a) Ermitteln Sie die Koeffizienten beider Polynome.
   (b) Diskutieren Sie beide Funktionen (bestimmen Sie so vorhanden Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Monotoniebereiche, Konvexitätsbereiche, die Gleichung der Wendetangente, und das Verhalten bei $\pm\infty$) und zeichnen Sie die Graphen im Intervall $[-5, 7]$.
   (c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von beiden Graphen und den Geraden $h_1 : x = -2$ und $h_2 : x = 1$ eingeschlossen wird.

   (**8 Punkte**)

(2) Zeigen Sie dass $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist, wobei man die Verknüpfungen durch

$$a \oplus b = a + b - 5, \quad \text{und}$$
$$a \otimes b = (a - 5)(b - 5) + 5$$

definiert. Lösen Sie in diesem Körper die Gleichung

$$(x \otimes x) \oplus x = 7.$$

   (**8 Punkte**)

(3) (a) Lösen Sie in den komplexen Zahlen die Gleichung

$$z^4 - 10z^2 + 169 = 0$$

und berechnen Sie das Produkt der vier Lösungen.

(**4 Punkte**)

   (b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

(**4 Punkte**)

(4) (a) Die Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene $\varepsilon_1 : 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0$ liegt, berührt die Ebene ε_2 im Punkt $T = (t_1, 4, 6)$. Die Ebene ε_2 wird durch die Punkte $A = (24, 7, 2)$, $B = (9, 8, 5)$ und $C = (4, -2, 6)$ bestimmt. Ermitteln Sie die Gleichung der Kugel κ. Bestimmen Sie außerdem Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises von κ mit der x_1x_2–Ebene.

(**4 Punkte**)

   (b) Gegeben Sei die Hyperbel $\mathrm{hyp} : 4x_1^2 - x_2^2 = 20$. Berechnen Sie die Koordinaten jener vier Hyperbelpunkte P, für die die beiden Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen. (Hinweis: Sei P so ein Punkt, dann ist $\overrightarrow{F_1P} \perp \overrightarrow{F_2P}$).

(**4 Punkte**)