Name (Familien- und Vor-):
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (11.1.2002)

(1) (a) Gegeben sei ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = 8\,cm$ und $b = 9\,cm$ und dem Winkel $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Die Fläche dieses Dreieckes soll durch eine möglichst kurze Strecke halbiert werden, deren Endpunkte auf den Seiten a bzw. b liegen. (Skizze!)
Wie lang ist diese Teilungsstrecke, und wie weit sind die Endpunkte der Strecke vom Eckpunkt C des Dreieckes entfernt.
(Hinweis zur Bezeichnung: Der Winkel γ ist der Winkel bei C, die Seite a liegt gegenüber von A und die Seite b gegenüber dem Eckpunkt B.)
(**6 Punkte**)

(b) Finden Sie in $\mathbb{R}$ die Lösungen der Gleichung

$$\sin^2 x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x + 1 = 0.$$

(**2 Punkte**)

(2) Sei M die Menge der ungeraden ganzen Zahlen. Auf M seien die beiden Verknüpfungen (**Abgeschlossenheit überprüfen!**)

$$x \oplus y := x + y + 7$$
$$x \otimes y := (x + 3)(y + 3) - 3$$

gegeben. Überprüfen Sie für $(M, \oplus, \otimes)$ die Gültigkeit **aller** Körperaxiome. Stellen Sie dadurch fest, ob M ein Körper ist bzw. ob M ein Ring ist.
(**8 Punkte**)

(3) (a) Lösen Sie in den komplexen Zahlen die Gleichung

$$z^2 - z + (1 + i) = 0$$

und berechnen Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + ib$

$$w_1 := \tfrac{z_1}{z_2}, \quad w_2 := \tfrac{z_2}{z_1}, \quad |w_1|, \quad |w_2|, \quad |z_1|, \quad |z_2|.$$

(**4 Punkte**)

(b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$$

(**4 Punkte**)

(4) Die Ellipse

$$\text{ell:} \quad 3x_1^2 + 5x_2^2 = 120$$

und eine Hyperbel haben die Brennpunkte F_1, F_2 und den Punkt $P = (5, p_2 > 0)$ gemeinsam.

(a) Ermitteln Sie die Hyperbelgleichung.
(b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen Ellipse und Hyperbel im Punkt P.
(c) In P sind die Tangenten an die Ellipse und die Hyperbel zu legen. Diese schneiden die x_2–Achse in den Punkten Q bzw. R.
(d) Zeigen Sie, dass die fünf Punkte P, Q, R, F_1 und F_2 auf einem Kreis liegen. Berechnen Sie die Gleichung dieses Kreises.
(e) Die Ellipse und der rechte Ast der Hyperbel begrenzen ein Flächenstück. Dieses Flächenstück rotiere um die x_1–Achse. Berechnen Sie das Volumen.

(**8 Punkte**)