

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

Note:

PRÜFUNG ZU EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN (14.3.2003)

- (1) Eine rotationssymmetrische Boje hat die Form eines Zylinders mit zwei aufgesetzten Halbkugeln. Der Radius der Halbkugeln ist die Hälfte des Zylinderradius. Wie ist der Zylinder zu dimensionieren, damit bei gegebenem Volumen V der Boje die erforderliche Blechmenge ein Minimum wird? Berechnen Sie diese Abmessungen und die zugehörige Oberfläche allgemein.

Die Boje soll aus Stahlblech gefertigt werden, das pro Quadratmeter $39,15 \text{ kg}$ wiegt. Wie groß muss der Zylinderradius gewählt werden, dass im Wasser schwimmend die Hälfte der Boje über der Wasseroberfläche bleibt.

(8 Punkte)

- (2) (a) Sei die Menge

$$K := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob K ein *Unterkörper* oder ein *Unterring* von \mathbb{R} ist.

(4 Punkte)

- (b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^n (k-1)(k+1) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n-3).$$

(4 Punkte)

- (3) (a) Lösen Sie in den komplexen Zahlen das Gleichungssystem

$$(3 + 4i)x + (2 - 2i)y = 1 + 8i$$

$$(1 - 2i)x + (3 + 3i)y = 8 + 9i$$

und stellen Sie die Lösungen x und y in der Form $a + ib$ dar. Berechnen Sie anschließend die folgenden Ausdrücke:

$$xy, \quad \left| \frac{x}{y} \right|, \quad \bar{x}y, \quad x^2y^2.$$

(5 Punkte)

- (b) Im Elektrogroßhandel seien zwei verschiedene Marken von Energiesparlampen erhältlich. Eine Dreierpackung der Marke A kostet €25 während die Lampen der Marke B einzeln verpackt sind zu je €10.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lampe der Marke A defekt ist, ist 5%, während die Lampen der Marke B zu 99,7% funktionieren. Nehmen wir an, dass wir defekte Lampen nicht umtauschen können.

Wir benötigen 31 Lampen. Nachdem der Großmarkt nur mit dem Auto erreichbar ist, kaufen wir so viele Lampen, dass wir zu 99,5% sicher gehen können, genug funktionstüchtige Lampen zu besitzen. Ist es billiger, die Lampen der Marke A oder die der Marke B zu kaufen?

(3 Punkte)

- (4) (a) Von einer Ellipse sind der Flächeninhalt $A = 50\pi$ und eine Tangente

$$t_{\text{ell}} : 2x + 3y = 25$$

gegeben. Ermitteln Sie die Gleichung der Ellipse und die Gleichung jener Hyperbel, die die Ellipse im Berührungspunkt der gegebenen Tangente orthogonal schneidet (2 Lösungen!).

(6 Punkte)

- (b) In einer Kiste liegen 20 Bohrer unterschiedlichen Durchmessers:

Durchmesser (mm)	3	4	5	6	7	8
Anzahl	2	4	4	5	2	3

Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Bohrer dem Durchmesser nach geordnet nebeneinander zu legen?

(2 Punkte)