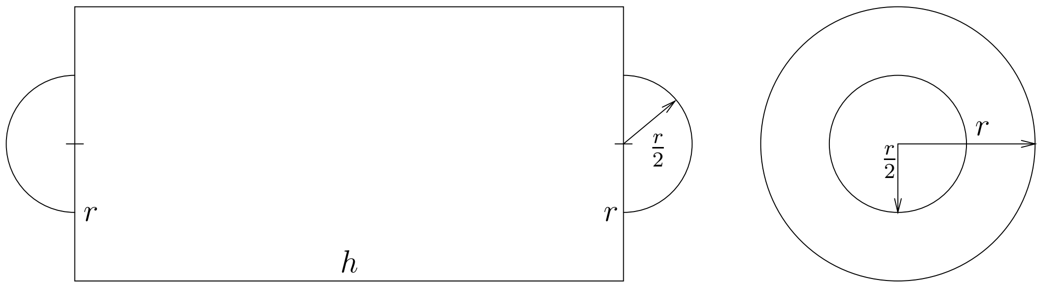
Lösungen für die Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (14.3.2003)

1. Die zu berechnende Boje hat in etwa die folgende Gestalt:



(**1 Punkt**)

Zunächst bestimmen wir die Oberfläche dieser Boje. Sie ist zusammengesetzt aus der Mantelfläche eines Zylinders

$$A_Z = 2\pi r h,$$

der Oberfläche einer Kugel (zwei Halbkugeln)

$$A_K = 4\pi\left(\tfrac{r}{2}\right)^2 = \pi r^2,$$

und den beiden Kreisringen, die von den Deckflächen des Zylinders über die Basiskreise der Halbkugeln hinausstehen

$$A_R = 2\pi(r^2 - \left(\tfrac{r}{2}\right)) = \tfrac{3}{2}\pi r^2,$$

insgesamt ist also

$$O = A_Z + A_K + A_R = 2\pi r h + \tfrac{5}{2}\pi r^2 = \pi r(2h + \tfrac{5}{2}r).$$

(**1 Punkt**)

Die nächste Aufgabe besteht darin, das Volumen zu bestimmen. Wieder setzt sich das Gesamtvolumen aus mehreren Teilen zusammen, dem Volumen eines Zylinders

$$V_Z = \pi r^2 h$$

und dem Volumen einer Kugel (wieder zwei Halbkugeln)

$$V_K = \tfrac{4}{3}\pi\left(\tfrac{r}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{6}\pi r^3,$$

was insgesamt

$$V = V_Z + V_K = \pi r^2 h + \tfrac{1}{6}\pi r^3 = \pi r^2(h + \tfrac{1}{6}r)$$

ergibt.

(**1 Punkt**)

Für die Nebenbedingung drücken wir uns h durch V, das ja fix vorgegeben sei, und r aus

$$h = \frac{V - \frac{1}{6}\pi r^3}{\pi r^2}. \tag{1}$$

Nachdem h positiv sein muss, gibt das die obere Grenze für r:

$$h > 0 \implies r < \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}.$$

Außerdem wissen wir $r > 0$.
(**1 Punkt**)
Jetzt wollen wir das Optimierungsproblem lösen. Die Hauptbedingung ist

$$\begin{aligned} \min O(r,h) &= \pi r(2h + \tfrac{5}{2}r) \\ \min O(r) &= \pi r\left(\frac{2V}{\pi r^2} - \tfrac{1}{3}r + \tfrac{5}{2}r\right) \\ &= \frac{2V}{r} + \frac{13\pi}{6}r^2. \end{aligned}$$

Wir setzen die erste Ableitung Null und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = O'(r) &= -2\frac{V}{r^2} + 2\frac{13\pi}{6}r \\ V &= \frac{13\pi}{6}r^3 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{6V}{13\pi}}. \end{aligned}$$

Die Lösung für r befindet sich innerhalb der zulässigen Grenzen, und r ist ein lokales Minimum, da $O''(r) > 0$ gilt. (**1 Punkt**)
Aus der Gleichung (1) für h erhalten wir

$$h = \frac{\frac{13\pi}{6}r^3 - \frac{1}{6}\pi r^3}{\pi r^2} = 2r,$$

und für die Oberfläche ergibt sich

$$O = \pi r(2 \cdot 2r + \tfrac{5}{2}r) = \frac{13\pi}{2}r^2.$$

(**1 Punkt**)
Legt man eine Boje ins Wasser, dann ist der Auftrieb F_A gleich dem Gewicht des verdrängten Wassers. Wasser hat eine Dichte von $1000\,kg\,m^{-3}$, und die Boje schwimmt, wenn sich Gewicht F_G der Boje und Auftrieb die Waage halten, also falls

$$\begin{aligned} F_G &= F_A \\ Mg &= gV_E \cdot 1000\,kg\,m^{-3} \end{aligned}$$

gilt, wobei V_E das Volumen unter der Wasseroberfläche bezeichnet und M die Masse der Boje repräsentiert. Die Erdbeschleunigung g fällt in der Gleichung weg, deren Wert ist also unerheblich. Nachdem die Boje zur Hälfte unter Wasser sein soll, ist $V_E = \frac{1}{2}V$.
(**1 Punkt**)
Es gelten

$$\begin{aligned} M &= 39.15\,kg\,m^{-2}\,O, \\ V &= O\tfrac{r}{3}. \end{aligned}$$

Daher können wir den Radius berechnen

$$0 = F_A g^{-1} - M = 1000\tfrac{V}{2}, kg\, m^{-3} - 39.15\, kg\, m^{-2} O = (1000\, O\tfrac{r}{6} - 39.15\, O\, m) kg\, m^{-2}$$
$$r = \tfrac{6 \cdot 39.15}{1000} m = 0.2349\, m = 23.49\, cm,$$

und die Höhe ist $h = 46.98\, cm$. Man verbraucht $1.12675\, m^2$ Blech.
(1 Punkt)

2. (a) Um zu überprüfen, ob K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, müssen wir zunächst die Abgeschlossenheit der Operationen $+$ und $*$ nachweisen:

Abgeschlossenheit von +: Es gilt

$$(a_1 + b_1\sqrt{5}) + (a_2 + b_2\sqrt{5}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{5},$$

und weil die Summe zweier ganzer Zahlen wieder ganz ist, liegt die Summe zweier Elemente von K wieder in K.
(1 Punkt)

Abgeschlossenheit von ∗: Wir haben

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{5}) * (a_2 + b_2\sqrt{5}) &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{5} + a_2b_1\sqrt{5} + 5b_1b_2 = \\ &= (a_1a_2 + 5b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Summe und Produkt ganzer Zahlen sind ganz, also hat das Produkt zweier Elemente aus K dieselbe Form wie alle Elemente von K und liegt daher auch in der Menge. Daher ist $*$ auf K abgeschlossen.
(1 Punkt)

Inverse bzgl. +: Sei $k = a + b\sqrt{5} \in K$. Dann ist das Inverse bzgl. $+$ in $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$-k = -a + (-b)\sqrt{5}.$$

Offenbar ist dieses Element wieder in K. Daher sind additiv Inverse enthalten.
(1 Punkt)

Inverse bzgl. ∗: Gehen wir wieder aus von $k = a + b\sqrt{5} \in K$ und sei $k \neq 0$. Wir finden das Inverse von k in $\mathbb{R}$ durch

$$k^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{5}} = \frac{a - b\sqrt{5}}{(a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5})} = \frac{a}{a^2 - 5b^2} + \frac{-b}{a^2 - 5b^2}\sqrt{5}.$$

Dieses Element ist im allgemeinen nicht in K, da die Ausdrücke

$$\frac{a}{a^2 - 5b^2} \quad \text{und} \quad \frac{-b}{a^2 - 5b^2}$$

üblicherweise keine ganzen Zahlen sind. Daher existieren in K nicht zu jedem Element multiplikative Inverse.
K ist daher kein Unterkörper von $\mathbb{R}$. Aber K ist Unterring von $\mathbb{R}$, und daher sogar ein Integritätsbereich.
(1 Punkt)

(b) Wir beginnen jeden Induktionsbeweis mit dem **Induktionsanfang** (hier für $n = 0$):

$$\sum_{k=0}^{0}(k-1)(k+1) = (0-1)(0+1) = -1 = \tfrac{1}{6}\cdot(0+1)(0+2)(2\cdot 0-3).$$

Dieser ist also richtig.
(**1 Punkt**)
Dann schreiben wir die **Induktionsvoraussetzung** auf. Für alle $j \leq n$ gelte

$$\sum_{k=0}^{j}(k-1)(k+1) = \tfrac{1}{6}(j+1)(j+2)(2j-3).$$

(**1 Punkt**)
Nun formulieren wir die **Induktionsbehauptung** (die Behauptung, die wir im **Induktionsschritt** beweisen möchten): Zu zeigen ist

$$\sum_{k=0}^{n+1}(k-1)(k+1) = \tfrac{1}{6}(n+2)(n+3)(2n-1).$$

(**1 Punkt**)
Zuletzt beweisen wir unsere Behauptung:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(k-1)(k+1) &= \sum_{k=0}^{n}(k-1)(k+1) + n(n+2) = \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}\\
&= \tfrac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n-3) + n(n+2) =\\
&= \tfrac{1}{6}(n+2)\big((n+1)(2n-3) + 6n\big) =\\
&= \tfrac{1}{3}(n+2)\big(2n^2+5n-3\big) =\\
&= \tfrac{1}{3}(n+2)(n+3)(2n-1),
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.
(**1 Punkt**)

3. (a) Betrachten wir das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
(3+4i)x + (2-2i)y &= 1+8i\\
(1-2i)x + (3+3i)y &= 8+9i.
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit $-3i$ und die zweite mit 2. Das ergibt

$$\begin{aligned}
(12-9i)x - (6+6i)y &= 24-3i\\
(2-4i)x + (6+6i)y &= 16+18i.
\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)
Dann addieren wir die beiden Gleichungen und erhalten

$$(14-13i)x = 40+15i,$$

somit gilt

$$x = \frac{40+15i}{14-13i} = \frac{(40+15i)(14+13i)}{(14-13i)(14+13i)} = \frac{365+730i}{14^2+13^2} = 1+2i.$$

(**1 Punkt**)
Um y zu bestimmen setzen wir ein:

$$y = \frac{1+8i-(3+4i)(1+2i)}{2-2i} = \frac{6-2i}{2-2i} = \frac{3-i}{1-i} = 2+i.$$

(**1 Punkt**)
Die vier Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned} xy &= (1+2i)(2+i) = i(2-i)(2+i) = 5i \\ \left|\tfrac{x}{y}\right| &= \tfrac{|x|}{|y|} = \tfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 \\ \overline{x}y &= (1-2i)(2+i) = 4-3i \\ x^2y^2 &= (xy)^2 = (5i)^2 = -25. \end{aligned}$$

(**2 Punkte**)

(b) Zunächst wollen wir feststellen, wie viele Lampen der Marke B gekauft werden müssen. Überprüfen wir, wie wahrscheinlich es ist, dass bei 31 gekauften Lampen alle funktionieren:

$$\mathbb{P} = 0.997^{31} \cong 0.911.$$

Das ist zu wenig. Daher müssen wir wenigstens eine Lampe mehr kaufen. Testen wir nun, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass von 32 gekauften Lampen wenigstens 31 funktionieren:

$$\mathbb{P} = 0.997^{32} + \binom{32}{1} 0.997^{31} \cdot 0.003 \cong 0.9958 > 0.995,$$

also müssten wir 32 Lampen der Marke B kaufen.
(**1 Punkt**)
Die Marke A wird in Packungen zu drei Stück verkauft. Die Ausfallswahrscheinlichkeit ist hoch, und daher werden wir versuchen, mit einer Extrapackung, also 12 Packungen auszukommen. Damit kaufen wir 36 Lampen, und die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens 31 davon funktionieren, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass keine, eine, zwei, usw. bis fünf Lampen defekt sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \sum_{d=0}^{5} \binom{36}{d} 0.95^{36-d}\, 0.05^{d} \\ &= 0.1577_{-} + 0.2989_{-} + 0.2753_{-} + 0.1642_{-} + 0.0713_{-} + 0.0240_{-} \cong 0.9917, \end{aligned}$$

es reicht also eine Extrapackung nicht aus (knapp aber doch).
Versuchen wir es mit einer weiteren Packung, also mit dem Kauf von 39 Lampen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \sum_{d=0}^{8} \binom{39}{d} 0.95^{39-d}\, 0.05^{d} \\ &= 0.135_{-} + 0.277_{-} + 0.277_{-} + 0.180_{-} + 0.085_{-} + 0.031_{-} + \\ &\quad + 0.009_{-} + 0.002_{-} + 0.0004_{-} \cong 0.9999, \end{aligned}$$

das ist mehr als genug.
(**$1\frac{1}{2}$ Punkte**)
Der Preisvergleich ergibt €325 für die 13 Pakete der Marke A und €320 für die 32 Lampen der Marke B, es wäre also günstiger das Produkt der Marke B zu besorgen.
(**$\frac{1}{2}$ Punkt**)
Wem die dargestellten Zahlen übertrieben erscheinen, der sei versichert, dass es tatsächlich Hersteller gibt, bei denen 5% der Lampen Ausschuss sind. Das gesteckte Ziel von 99.5% Sicherheit ist auch sehr hoch angesetzt. Gibt man sich mit 77% − 99% zufrieden, dann muss man nur 12 Packungen der Marke A und 31 Lampen der Marke B besorgen, und der Preisvergleich sieht mit €300 zu €310 besser für A aus.

4. (a) Zunächst wollen wir die Gleichung der Ellipse bestimmen: Der Flächeninhalt der Ellipse ist $ab\pi$, also folgt die erste Gleichung

$$ab = 50.$$

Die Tangente berührt die Ellipse. Daher verwenden wir die **Berührbedingung**

$$k^2a^2 + b^2 = d^2$$

für eine Gerade der Form $y = kx + d$. Transformieren wir t_{ell} auf diese Gestalt:

$$t_{ell}: \quad y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{25}{3}.$$

Das führt zur zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{9}a^2 + b^2 &= \tfrac{625}{9} \\ 4a^2 + 9b^2 &= 625. \end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Die Gültigkeit der Berührbedingung kann man folgendermaßen herleiten:
Seien die Ellipse

$$ell: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und die Gerade

$$g: \quad y = kx + d$$

gegeben. Wollen wir die beiden schneiden, dann müssen wir g in ell einsetzen. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+d)^2}{b^2} &= 1 \\ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)x^2 + \frac{2kd}{b^2}x + \left(\frac{d^2}{b^2} - 1\right) &= 0, \\ \left(\frac{b^2}{a^2} + k^2\right)x^2 + 2kdx + d^2 - b^2 &= 0, \end{aligned}$$

eine quadratische Gleichung für x. Wir lösen sie und erhalten

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-2kd \pm \sqrt{4k^2d^2 - 4(\frac{b^2}{a^2}+k^2)(d^2-b^2)}}{2(\frac{b^2}{a^2}+k^2)} \\
&= \frac{-kd \pm \sqrt{\frac{b^4}{a^2} - \frac{b^2d^2}{a^2} + k^2b^2}}{\frac{b^2}{a^2}+k^2} \\
&= \frac{-2kd \pm \frac{b}{a}\sqrt{b^2 - d^2 + k^2a^2}}{\frac{b^2}{a^2}+k^2}.
\end{aligned}$$

Damit die g die Ellipse berührt und nicht in zwei Punkten schneidet müssen x_1 und x_2 zusammenfallen, die Wurzel muss also verschwinden, und das ergibt die Bedingung

$$k^2a^2 + b^2 = d^2.$$

Weiters können wir aus der Gleichung noch die Koordinaten des Berührungspunktes bestimmen:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-kd}{\frac{b^2}{a^2}+k^2} \\
&= \frac{-kda^2}{b^2+a^2k^2} \\
&= \frac{-kda^2}{d^2} = \frac{-k}{d}a^2 \\
y &= kx + d = k\frac{-k}{d}a^2 + d = \frac{-a^2k^2}{d} + d \\
&= \frac{-a^2k^2+d^2}{d} \\
&= \frac{b^2}{d}.
\end{aligned}$$

Verwenden wir nun die beiden Gleichungen, dann erhalten wir, indem wir $a^2b^2 = 2500$ in die zweiten Gleichung einsetzen und mit a^2 multiplizieren, eine biquadratische Gleichung

$$4a^4 - 625a^2 + 22500 = 0.$$

Deren Lösungen sind

$$\begin{aligned}
a_{1,2}^2 &= 100, \frac{225}{4}, \\
a_{1,2} &= 10, \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgen die Werte für b

$$b_{1,2} = 5, \frac{20}{3}.$$

Die Gleichungen der beiden Lösungen sind also

$$\begin{aligned} ell_I: \quad & \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \\ ell_{II}: \quad & \frac{4x^2}{225} + \frac{9y^2}{400} = 1. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Jetzt wollen wir die Hyperbelgleichungen suchen. Wenn sich Hyperbeln und Ellipsen orthogonal schneiden, sind sie konfokal, d.h. sie haben gemeinsame Brennpunkte. Die linearen Exzentrizitäten der Ellipsen sind nach Berechnung gemäß der Formel $e^2 = a^2 - b^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} e_I^2 &= 75 \\ e_{II}^2 &= \tfrac{425}{36}. \end{aligned}$$

Diese Exzentrizitäten müssen also auch die Hyperbeln aufweisen, und für Hyperbeln ist die Formel $e^2 = a^2 + b^2$. Wir haben also für jede der beiden Lösungen eine Gleichung:

$$\begin{aligned} a_I^2 + b_I^2 &= 75 \\ a_{II}^2 + b_{II}^2 &= \tfrac{425}{36}. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Dann muss noch der Berührpunkt der Tangente auf der Hyperbel liegen, also müssen wir die Berührpunkte bestimmen:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 25} 100 = 8 \\ y_I &= \frac{25}{\frac{25}{3}} = 3 \\ x_{II} &= \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 25} \frac{225}{4} = \frac{9}{2} \\ y_{II} &= \frac{400 \cdot 3}{9 \cdot 25} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Setzen wir diese in die Hyperbelgleichung

$$hyp: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ein, dann ergibt sich je eine zweite Gleichung für die a und b:

$$\begin{aligned} \frac{64}{a_I^2} - \frac{9}{b_I^2} &= 1 \\ \frac{81}{4a_{II}^2} - \frac{256}{9b_{II}^2} &= 1. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Jetzt drücken wir uns aus den Exzentrizitätsgleichungen b^2 aus und setzen ein. Das ergibt wieder biquadratische Gleichungen

$$\begin{aligned} a_I^4 - 148a_I^2 + 4800 &= 0 \\ a_{II}^4 - \frac{1089}{18}a_{II}^2 + \frac{3825}{16} &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind jeweils

$$\begin{aligned} (a_I^2)_{1,2} &= 100, 48 \\ (a_{II}^2)_{1,2} &= \frac{2025}{36}, \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir erneut die linearen Exzentrizitäten, um die zugehörigen b^2 zu bestimmen:

$$\begin{aligned} (b_I^2)_{1,2} &= -25, 27 \\ (b_{II}^2)_{1,2} &= -\frac{400}{9}, \frac{68}{9}. \end{aligned}$$

Nur die jeweils positiven Lösungen kommen in Betracht.

Ein alternativer Weg für die Bestimmung von a und b ist die Verwendung der Tangenten. Wir wissen, dass die Hyperbel die Ellipse rechtwinkelig schneidet, also hat die Hyperbel im Berührpunkt eine auf t_{ell} orthogonal stehende Tangente. Diese Tangente hat die Gleichung

$$t_{hyp}: \quad y = \tfrac{3}{2}x + d,$$

wobei d durch den Berührpunkt bestimmt wird:

$$\begin{aligned} t_{hyp_I}: &\quad y = \tfrac{3}{2}x - 9 \\ t_{hyp_{II}}: &\quad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{17}{12}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Tangentengleichung an eine Hyperbel im Berührungspunkt ist

$$t_{hyp}: \quad \frac{x_p}{a^2}x - \frac{y_p}{b^2}y = 1,$$

und daher wissen wir

$$\begin{aligned} t_{hyp_I}: &\quad \frac{8}{a_I^2}x - \frac{3}{b_I^2}y = 1 \\ t_{hyp_{II}}: &\quad \frac{9}{2a_{II}^2}x - \frac{16}{3b_{II}^2}y = 1. \end{aligned}$$

Diese Tangentengleichungen müssen mit denen oben übereinstimmen, und daher formen wir die Gleichungen (2) um:

$$\begin{aligned} t_{hyp_I}: &\quad \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{9}y = 1 \\ t_{hyp_{II}}: &\quad \tfrac{18}{17}x - \tfrac{12}{17}y = 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned}\frac{8}{a_I^2} &= \frac{1}{6}\\ \frac{3}{b_I^2} &= \frac{1}{9}\\ \frac{9}{2a_{II}^2} &= \frac{18}{17}\\ \frac{16}{3b_{II}^2} &= \frac{12}{17},\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} a_I^2 = 48, \quad b_I^2 = 27\\ a_{II}^2 = \frac{17}{4}, \quad b_{II}^2 = \frac{68}{9}\end{aligned}$$

folgt.
(2 Punkte)
Zu guter letzt finden wir also die Hyperbelgleichungen

$$\begin{aligned} hyp_1: \quad & \frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{27} = 1\\ hyp_2: \quad & \frac{4x^2}{17} - \frac{9y^2}{68} = 1.\end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

(b) Zunächst hat man die Wahl, ob man die Bohrer so sortiert, dass der Durchmesser zunimmt oder so, dass er abnimmt. Schließlich muss man die einzelnen Größenklassen nebeneinander legen wie vorgegeben, und man kann nur innerhalb der Gruppen vertauschen. Die Anzahl der Möglichkeiten ist also gegeben durch

$$2 \cdot 2!4!4!5!2!3! = 3317760.$$

(**2 Punkte**)