**Familienname:**
**Vorname:**
**Matrikelnummer:**
**Studienkennzahl:**

| |
|---|
| **1** |
| **2** |
| **3** |
| **4** |
| **G** |

**Note:**

PRÜFUNG ZU EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN (16.5.2003)

(1) Eine rationale Funktion der Gestalt

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - a}$$

enthält den Punkt $P = (-1, 1/15)$.

(a) Bestimmen Sie den Parameter $a$.

(b) Diskutieren Sie die entstehende Funktion.

(c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f$, von den Geraden $g_1 : x = -3$ und $g_2 : x = 2$ und der $x$–Achse begrenzt wird.

(**8 Punkte**)

(2) Überprüfen Sie, ob $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist, wobei man die Verknüpfungen durch

$$a \oplus b = a + b - 10, \quad \text{und}$$
$$a \otimes b = ab - 5a - 5b + 30$$

definiert. Überprüfen Sie alle Körperaxiome! Ist die Gleichung

$$(x \otimes x) \oplus x = 11$$

dort lösbar?

(**8 Punkte**)

(3) (a) Lösen Sie in den komplexen Zahlen das Gleichungssystem

$$(1 - 3i)x + (2 - 3i)y = 10 - 3i$$
$$(1 + 5i)x + (3 + 2i)y = 7 + 22i$$

und stellen Sie die Lösungen $x$ und $y$ in der Form $a + ib$ dar. Berechnen Sie anschließend die folgenden Ausdrücke:

$$\left|\tfrac{y}{x}\right|, \quad \overline{x}y.$$

(**4 Punkte**)

(b) Beim Würfeln mit drei verschiedenfarbigen Würfeln wird das Ereignis „Augensumme 11“ betrachtet.

(i) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ereignismenge.

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf 11 bzw. *nicht* 11 zu werfen?

(iii) Bei dem Spiel darf jeder Spieler den Wurf dreimal durchführen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler dabei *nie* bzw. *zumindest einmal* die Augensumme 11 wirft.

(**3 Punkte**)

(c) In einer Kiste befinden sich 24 Socken. Die Kiste befindet sich in einem stockdunklen Raum, sodass die einzelnen Socken voneinander nicht unterscheidbar

sind. Wieviele Socken muss man mindestens aus der Kiste nehmen, um wenigstens ein passendes Paar zu erhalten.
Wieviele Socken benötigt man mindestens, wenn je 12 Socken rot bzw. blau sind? Was ändert sich, wenn es 4 rote und 20 blaue Socken sind?
(**1 Punkt**)

(4) (a) Auf einer gleichseitigen Hyperbel (gedrehte Lage)

$$\text{hyp:} \quad y = 1/x$$

liegen die Dreieckspunkte $A = (a, y_A)$, $B = (b, y_B)$ und $C = (c, y_C)$. Zeigen Sie, dass auch der Höhenschnittpunkt des Dreiecks auf der gegebenen Hyperbel liegt.
(**4 Punkte**)

(b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \tfrac{1}{6} n(2n^2 + 9n + 13).$$

(**4 Punkte**)