Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

- ☐ **H. Schichl**
- ☐ **M. Kunzinger**

Note:

Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (10.11.2006)

(1) *(Algebra)*
  (a) Definiere den Begriff *Ring*. (**3 Punkte**)
  (b) Definiere den Begriff *Nullteiler* und gib ein Beispiel für Nullteiler an. (**2 Punkte**)
  (c) Überprüfe, ob die unten definierte algebraische Struktur $(K, \oplus, \otimes)$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist:
$$K := \{a + \sqrt{3}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$
  mit
$$(a_1 + \sqrt{3}b_1) \oplus (a_2 + \sqrt{3}b_2) := a_1 + a_2 + \sqrt{3}(b_1 + b_2),$$
$$(a_1 + \sqrt{3}b_1) \otimes (a_2 + \sqrt{3}b_2) := a_1a_2 + 3b_1b_2 + \sqrt{3}(a_1b_2 + a_2b_1).$$
  (**5 Punkte**)

(2) *(Kurvendiskussion)* Eine Polynomfunktion p zweiten Grades wird von der Geraden $g : y = 6x - 8$ im Punkt $P = (3|y_P)$ berührt. Der Flächeninhalt unter der Funktion zwischen $x = 0$ und $x = 3$ beträgt $7\frac{1}{2}$ Flächeneinheiten.
  (a) Bestimme die Funktionsgleichung von p. (**8 Punkte**)
  (b) Ermittle alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von p und die Gleichung der Tangente an p im Punkt $Q(0|y_Q)$. (**2 Punkte**)

(3) (a) *(Analytische Geometrie)* Gegeben sei die Ebene $\varepsilon :\ 3x + 4y - 2z = 22$ im $\mathbb{R}^3$. Für den Punkt $P = (1| - 1|3)$ bestimme:
    (i) Die Gleichung der durch P gehenden Normalen n auf ε.
    (ii) Den Schnittpunkt von n und ε.
    (iii) Den Abstand von P und ε.
  (**7 Punkte**)
  (b) *(Abbildungen)* Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Was versteht man unter dem Bild von f? Sei weiters $B \subseteq Y$. Was versteht man unter dem Urbild von Y unter f? Was bedeutet $f^{-1}(x)$ für $x \in Y$? (**3 Punkte**)

(4) (a) *(Induktion)* Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:
$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \tfrac{1}{2}n(3n - 1).$$
  (**4 Punkte**)
  (b) *(Mengenlehre)* Gib die Potenzmenge der Menge $M = \{a, b, c\}$ an. Wieviele Elemente hat die Potenzmenge eine n–elementigen Menge? (**2 Punkte**)
  (c) *(Zahlen)* Beweise, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. (**4 Punkte**)