

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

Note:

PRÜFUNG ZU EINFÜHRUNG IN DAS MATHEMATISCHE ARBEITEN (9.3.2007)

- (1) (*Algebra*)
- (a) Definiere den Begriff *Körper*. (**4 Punkte**)
 - (b) Definiere den Begriff *Nullteiler* und gib ein Beispiel für Nullteiler an. (**2 Punkte**)
 - (c) Überprüfe, ob die unten definierte algebraische Struktur (T, \oplus, \otimes) ein Teilring von \mathbb{R} ist:

$$T := \{a + \sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

mit

$$(a_1 + \sqrt{5}b_1) \oplus (a_2 + \sqrt{5}b_2) := a_1 + a_2 + \sqrt{5}(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + \sqrt{5}b_1) \otimes (a_2 + \sqrt{5}b_2) := a_1a_2 + 5b_1b_2 + \sqrt{5}(a_1b_2 + a_2b_1).$$

- (**4 Punkte**)
- (2) (a) (*Kurvendiskussion*) Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx + c}{x}$$

besitzt bei $x = 3$ einen Wendepunkt mit Wendetangente $t : 2x + y = 9$.

- (i) Bestimme die Funktionsgleichung von f . (**5 Punkte**)
 - (ii) Zeichne den Graphen von f im Intervall $[-5, 5]$. (**2 Punkte**)
- (b) (*Mengenlehre*) Zeige: Für je zwei Mengen A und B ist die Aussage $A \supseteq B$ äquivalent zu der Aussage $A \cup B = A$. (**3 Punkte**)
- (3) (a) (*Analytische Geometrie*) Spiegle die Strecke \overline{PQ} mit den Endpunkten $P = (-1|3|-3)$ und $Q = (-2|8|-2)$ an der Ebene $\varepsilon : 3x + y - 4z = 8$ und berechne die Fläche des entstehenden Vierecks. (**7 Punkte**)
- (b) (*Abbildungen*) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, A und B Teilmengen von Y . Beweise $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. (**3 Punkte**)
- (4) (a) (*Induktion*) Beweise mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n (2k - 5) = (n + 1)(n - 5).$$

- (**4 Punkte**)
- (b) (*Binomischer Lehrsatz*) Berechne $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$. (**2 Punkte**)
 - (c) (*Zahlen*) Beweise, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. (**4 Punkte**)