

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

Note:

**Prüfung zu “Einführung in das mathematische
Arbeiten” und über den Schulstoff**

(14.12.2007)

1. (*Kurvendiskussion*)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat an der Stelle 4 den Funktionswert -3 . Die erste Ableitung von f lautet

$$f'(x) = \frac{x^3}{4} - 3x.$$

- (a) Bestimme die Funktionsgleichung von f . (**3 Punkte**)
- (b) Bestimme Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von f . (**3 Punkte**)
- (c) Bestimme Wendepunkte und Wendetangenten von f . (**2 Punkte**)
- (d) Skizziere den Graphen von f im Intervall $[-5, 5]$ (**1 Punkt**)
- (e) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit den beiden Wendetangenten einschließt. (**3 Punkte**)

2. (a) (*Analytische Geometrie*) Gegeben sind die Ebene

$$\varepsilon : x + 2y + 3z = -12$$

und die Gerade g durch die Punkte $P_1 = (-3, -4, -5)$ und $P_2 = (-3, -1, 7)$. Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der Ebene ε und den Winkel, den g und ε einschließen. (**7 Punkte**)

- (b) (*Gleichung*) Löse die Gleichung $-5e^{3y} + e^{6y} = -6$. (**3 Punkte**)

3. (*Zahlenspiele, Begriffe*)

- (a) Beweise, dass die Zahl $\sqrt{2}$ irrational ist. (**3 Punkte**)

- (b) Berechne $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$. (**2 Punkte**)

- (c) Zeige mittels vollständiger Induktion, dass

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

gilt. (**4 Punkte**)

(d) Definiere den Begriff Ebene im \mathbb{R}^3 . (1 Punkt)

4. (*Sammelsurium*)

(a) Sei f eine Funktion von $A \rightarrow B$. Was besagen die folgenden Aussagen? (Gib einen passenden Begriff an.) (2 Punkte)

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b \quad \text{und} \quad \exists b \in B \forall a \in A : f(a) = b$$

(b) Definiere die Begriffe Ordnungsrelation und Totalordnung. (1 Punkt)

(c) Gibt es eine Gruppe mit keinem Element? Gibt es eine Gruppe mit einem Element? Gibt es einen Ring mit einem Element? Gibt es einen Körper mit einem Element? Gibt es einen Körper mit zwei Elementen? Wenn ja, gib ein Beispiel an, wenn nein, begründe. (3 Punkte)

(d) Definiere den Begriff eines *geordneten* Körpers (2 Punkte) und zeige, dass aus den Ordnungsaxiomen

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$$

folgt. (2 Punkte)