1	
2	
3	
4	
G	

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Note:

Prüfung zu "Einführung in das mathematische Arbeiten" und über den Schulstoff

(14.3.2008)

1. (a) *(Kurvendiskussion)* Eine rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2-ax+b}{x-c}$ besitzt einen Extrempunkt in $E = (1, 5)$ und eine Nullstelle $N = (3, 0)$.
   i. Bestimme die Funktionsgleichung von f und den maximal möglichen Definitionsbereich. (**4 Punkte**)
   ii. Bestimme alle Nullstellen und Extremwerte von f. (**3 Punkte**)
   iii. Bestimme die schräge und die senkrechte Asymptote von f. (**1 Punkt**)
   iv. Skizziere den Graphen der Funktion im Bereich $[-7, 7]$. (**1 Punkt**)

   (b) *(Restklassen)* Bestimme $2^{3557} \mod 3$. (**1 Punkt**)

2. (a) *(Analytische Geometrie)* Bestimme die zu der Ebene $\varepsilon : 3x - 2y + 6z = 6$ im Abstand 5 parallel liegenden Ebenen. (**7 Punkte**)

   (b) *(Mengenlehre)* Zeige: Für je zwei Mengen A, B ist die Aussage $A \subseteq B$ äquivalent zu $A \cup B = B$. (**3 Punkte**)

3. (a) (*Algebra*) Definiere die Begriffe *kommutativer Ring* und *Nullteiler*, und überprüfe, ob $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$

$$x \circ y := 8xy$$

   eine abelsche Gruppe bildet. (**6 Punkte**)

   (b) (*vollständige Induktion*) Beweise mittels vollständiger Induktion für $x \neq -1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(1-x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1+x}.$$

   Wird die Voraussetzung $x \neq -1$ wirklich benötigt; wenn ja, wo? (**4 Punkte**)

4. (a) *(Relationen)* Definiere die Begriffe Halbordnung, Totalordnung, Supremum und Maximum, und bestimme Suprema, Infima, Minima und Maxima (soferne vorhanden) für die folgenden Teilmengen der angegebenen Mengen mit ihrer natürlichen Totalordnung:

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1 + \tfrac{1}{n+1}, n\right] \subset \mathbb{R},$$
$$B := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 5\} \subset \mathbb{R}, \quad C := \{y \in \mathbb{Q} \mid y^2 < 7\} \subset \mathbb{Q}.$$

(**6 Punkte**)

(b) *(Zahlen)* Beweise: jede natürliche Zahl $a > 1$ kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden. (**4 Punkte**)