Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1	
2	
3	
4	
G	

☐ **N. Kaiblinger**
☐ **H. Schichl**

Note:

Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (13.6.2008)

(1) (a) *(Kurvendiskussion)* Bestimmen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

anhand der folgenden Eigenschaften: Im Punkt $(0 \mid 3)$ hat f ein Minimum, an der Stelle $x = 2$ liegt ein Wendpunkt vor, und die Steigung der Wendetangente ist 4. (**4 Punkte**)

(b) *(Analytische Geometrie)* Berechnen Sie die Schnittpunkte des Kreises k mit Mittelpunkt $M = (1 \mid -3)$ und Radius $r = \sqrt{50}$ mit der Geraden $g\colon x + y = 10$. (**3 Punkte**)

(c) *(Relationen)* Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$0 \leq \frac{1}{x} < 1$$

in $\mathbb{R}$. Ebenso für

$$|1 - 2x| \leq 3x + 1.$$

(**2 Punkte**)

(d) *(Mengen)* Geben Sie die Potenzmenge der Menge $A = \{a_1, a_2, b\}$ an. (**1 Punkt**)

(2) (a) *(Abbildungen)* Geben Sie ein Beispiel einer Funktion, die surjektiv, aber nicht injektiv ist. (**2 Punkte**)

(b) Seien $f\colon B \to C$ und $g\colon A \to B$ Abbildungen. Zeigen Sie: Sind f und g surjektiv, dann auch $f \circ g$. (**3 Punkte**)

(c) *(Binomischer Lehrsatz)* Formulieren Sie den Binomischen Lehrsatz. (**3 Punkte**)

(d) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

(**2 Punkte**)

Fortsetzung: bitte umblättern!

(3) (a) *(Algebra)* Überprüfen Sie, ob die folgende algebraische Struktur $(K, \oplus, \otimes)$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist:

$$K := \{a + \pi b\colon a, b \in \mathbb{Q}\},$$

mit

$$(a_1 + \pi b_1) \oplus (a_2 + \pi b_2) := a_1 + a_2 + \pi(b_1 + b_2),$$
$$(a_1 + \pi b_1) \otimes (a_2 + \pi b_2) := a_1 a_2 + \pi^2 b_1 b_2 + \pi(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

(**4 Punkte**)

(b) *(Algebra)* Kann ein gegebenes Element einer Gruppe zwei verschiedene Inverse haben? Falls nein, beweisen Sie dies; falls ja, geben Sie ein Beispiel. (**4 Punkte**)

(c) *(Logik)* Drücken Sie die logische Funktion f, gegeben anhand der folgenden Wahrheitstabelle, durch $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ aus.

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

(**2 Punkte**)

(4) (a) *(Induktion)* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(**5 Punkte**)

(b) *(Komplexe Zahlen)* Zeigen Sie dass die Multiplikation komplexer Zahlen kommutativ ist. (**2 Punkte**)

(c) Bestimmen die Lösungen der Gleichung $z^2 = 8 + 6i$ in $\mathbb{C}$ (mit Angabe von Real- und Imaginärteil). (**2 Punkte**)

(d) *(Restklassen)* Berechnen Sie

$$1516^{2627} \bmod 13.$$

(**1 Punkt**)