Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
G

☐ **A. Čap**
☐ **H. Schichl**

Note:

Prüfung über „Einführung in das mathematische Arbeiten“ und den Schulstoff (18.1.2013)

(1) (a) *(Algebra)* Definieren Sie den Begriff *Ring*, indem Sie, analog zu den Körperaxiomen, die einzelnen Gesetze aufzählen.
(**4 Punkte**)
(b) *(Mengenlehre)* Wann nennt man zwei Mengen A und B gleichmächtig? Beweisen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind. (**2 Punkte**)
(c) *(Logik)* Verneinen Sie die Aussage

$$\forall r \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : N > r.$$

(**1 Punkte**)
(d) *(Abbildungen)* Definieren Sie die Begriffe bijektiv und Umkehrfunktion. Beweisen Sie, dass die Verknüpfung zweier surjektiver Abbildungen wieder surjektiv ist. (**3 Punkte**)

(2) (a) *(Analytische Geometrie)* Gegeben sei die Strecke $\overline{PQ}$ mit den Endpunkten $P = (1, 0, -1)$ und $Q = (3, -1, 2)$, sowie die Ebene $\varepsilon : x + 2y - 2z = 4$.
(i) Bestimmen Sie die Endpunkte P' und Q' der Strecke, die durch Spiegeln von $\overline{PQ}$ an ϵ entsteht.
(ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $PP'Q'Q$.
(**5 Punkte**)
(b) *(Relationen)* Sei M eine Menge. Was versteht man unter einer Ordnungsrelation auf M? Was bedeutet in diesem Zusammenhang vergleichbar? Wie ist der Begriff Supremum definiert? (**3 Punkte**)

WEITER AUF DER RÜCKSEITE!

(3) *(Kurvendiskussion)* Die Polynomfunktion vierten Grades $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle 1 den Wert $\frac{12}{25}$. Die erste Ableitung von f lautet

$$f'(x) = 4x^3 - \tfrac{27}{25}x.$$

(a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. (**2 Punkte**)
(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f. (**2 Punkte**)
(c) Berechnen Sie die Extremwerte, Wendepunkte, sowie die Wendetangenten von f. (**4 Punkte**)
(d) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten gegen $\pm\infty$. (**1 Punkt**)
(e) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

(**1 Punkt**)

(4) (a) *(Induktion)* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1}$$

gilt. (**4 Punkte**)

(b) *(Beweise)* Beweisen Sie, dass
(i) in einem Ring $(R, +, \cdot, 0)$ für jedes $r \in R$ gilt, dass $r0 = 0$. (**1 Punkt**)
(ii) in einem Monoid inverse Elemente eindeutig bestimmt sind. (**1 Punkt**)
(iii) für eine Abbildung $f : X \to Y$ und Teilmengen $A, B \subseteq Y$ gilt, dass $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. (**2 Punkte**)

(c) *(Komplexe Zahlen)* Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms

$$z^3 - (2 - 5i)z^2 - (7 - i)z$$

und geben Sie die Lösungen in der Form $a + ib$ an. (**4 Punkte**)