# 1 Typische Prüfungsbeispiele für Einführung in das mathematische Arbeiten

Bei einem Prüfungstermin werden üblicherweise vier Aufgaben dieser Art gestellt. Beispiele aus dem Schulstoff sind dabei typische Matura–Aufgaben. Eine Prüfung dauert drei Stunden. Die Punkte werden auf die Beispiele gemäß ihrer Schwierigkeit verteilt. Dabei gelten Beispiele, die zum neuen Stoff gehören, bei gleichem Zeitaufwand grundsätzlich als schwieriger als Schulbeispiele.

1. Der Kreis $k_1$ mit Mittelpunkt $(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$ und Radius $\frac{\sqrt{50}}{2}$ wird von der Geraden $g : X = \binom{4}{5} + \lambda\binom{-1}{-3}$ geschnitten. In den Schnittpunkten $T_1$ und $T_2$ werden Tangenten an den Kreis gelegt, die einander im Punkt $S$ schneiden. Berechnen Sie
   (a) die Koordinaten von $S$ und den Winkel zwischen den Tangenten,
   (b) den Flächeninhalt des Dreiecks $D = T_1T_2S$,
   (c) die Gleichung und den Flächeninhalt des Umkreises $k_2$ des Dreiecks $D$,
   (d) den Inhalt des Flächenstücks, das $k_1$ und $k_2$ gemeinsam haben.
   (e) Beweisen Sie unabhängig von der speziellen Wahl von $k_1$ und $g$, dass $k_2$ durch den Mittelpunkt von $k_1$ gehen muss, d.h. sein Mittelpunkt $U$ Halbierungspunkt der Strecke $\overline{MS}$ ist. Vorausgesetzt sei nur, dass $k_1$ und $g$ sich in zwei Punkten schneiden.

2. Eine zylinderförmige Arena (Durchmesser $200\,m$, Höhe $20\,m$) soll mit einem bis zum Boden reichenden Rotationsparaboloid zeltförmig überdacht werden, wobei der umbaute Raum des Zeltes minimal werden soll. Berechnen Sie Höhe und Bodenradius dieses Zeltes und das Volumen des umbauten Raumes.

3. (a) Bestimmen Sie die Lösungen $z_1$ und $z_2$ der Gleichung
   $$z^2 - z + (i + 1) = 0$$
   in $\mathbb{C}$.
   (b) Berechnen Sie die Zahl $z = \frac{\sqrt{2}}{2} z_1 z_2$.
   (c) Bestimmen Sie die Menge $G$ aller *verschiedenen* Potenzen von $z$
   $$z^0, z, z^2, z^3, \ldots, z^n$$
   und beweisen Sie, dass $G$ zusammen mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

(d) Stellen Sie die Verknüpfungstabelle von $G$ auf und bestimmen Sie die Ordnung von $G$.

4. Die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3$ des Polynoms

$$p(x) = x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$$

bilden eine geometrische Folge. Der Graph des Polynoms $p$ hat in $E = (-2, 76)$ ein Extremum.

   (a) Berechnen Sie die Koeffizienten (**Achtung**: zwei Lösungen)

   (b) Diskutieren Sie beide Funktionen und zeichnen Sie die Graphen in $[-10, 4]$. Bestimmen Sie die Nullstellen näherungsweise auf ein Zehntel genau.
   (Wählen Sie als Einheiten auf der $x$–Achse $1\,cm$ und auf der $p(x)$–Achse $1\,mm$. Zeichnen Sie nur den Bereich des Graphen, der zwischen $p(x) = -60$ und $p(x) = 140$ liegt.)

   (c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von beiden Kurven und der $x$–Achse eingeschlossen wird und im 2. Quadranten liegt.

   (d) Dieses Flächenstück rotiert um die $x$–Achse. Berechnen Sie das Volumen das dabei entstehenden Rotationskörpers.

5. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist, wobei die Verknüpfungen definiert seien als

$$\begin{aligned} a \oplus b &= a + b + 4 \\ a \otimes b &= ab + 4a + 4b + 12 \end{aligned}$$

Lösen sie in diesem Körper die Gleichung

$$(x \oplus x) \otimes x = 46.$$

6. Einem Würfel wird eine Kugel eingeschrieben. Zu allen Ecken hin werden immer wieder einander berührende Kugeln eingeschrieben. In welchem Verhältnis steht die Summe aller Kugelinhalte zum Volumen des Würfels.

7. Von einem gleichschenkeligen Trapez kennt man die Länge der Parallelseite $a = 67$ und die Länge der Diagonale $e = 54$. Der der Seite $b$ gegenüberliegende Winkel zwischen den Diagonalen ist $\epsilon = 4\pi/15$. Das

Trapez dreht sich einmal um die eine, dann um die andere Parallelseite. In welchem Verhältnis stehen die Oberfläche und Volumina beider Drehkörper?

8. Bei einer Blutuntersuchung wird festgestellt, dass von 2000 Versuchspersonen 706 die Blutgruppe O aufweisen.

   (a) Kann die Annahme, dass 35% der Personen in der betrachteten Grundgesamtheit die Blutgruppe O haben, aufgrund des Stichprobenergebnisses verworfen werden? Wenn nein, bei welchen Stichprobenergebnissen könnte man diese Annahme verwerfen? (Wähle die Signifikanzzahl $\alpha_0 = 0.05$!)

   (b) Wie (8a), wenn die Vermutung vorliegt, dass der Prozentsatz an Personen mit Blutgruppe O zugenommen hat.

   (c) Gib auf Grund des Stichprobenergebnisses das 95%–Konfidenzintervall für den Anteil der Personen mit Blutgruppe O in der Grundgesamtheit an.

   (d) Ist es aufgrund des Ergebnisses von (8c) denkbar, dass höchstens 30% in der Grundgesamtheit die Blutgruppe O haben? Wie wahrscheinlich ist das höchstens?

9. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $q \neq 1$ die Summe der endlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

erfüllt. Leiten Sie aus dieser Beziehung die Gleichung

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$$

her. Berechnen Sie

$$3^7 + 2 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^5 + 8 \cdot 3^4 + 16 \cdot 3^3 + 32 \cdot 3^2 + 64 \cdot 3 + 128.$$