

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1
2
3
4
5
G

Note:

PRÜFUNG ZU NUMERISCHE MATHEMATIK 1 (16.10.2009)

- (1) *Numerische Lineare Algebra:*
- (a) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Erläutern Sie den Lösungsbegriff im Fall $m > n$. Wie ändert sich der Lösungsbegriff im Fall unterbestimmter Gleichungssysteme, also wenn $m < n$ gilt?
(1 Punkt)
 - (b) Gegeben sei eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{K}^n$. Beschreiben Sie den Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Rx = b$. Wie hoch ist der Aufwand für den Algorithmus? Wie kann man die Rundungsfehler abschätzen? Ist der Algorithmus gutartig?
(3 Punkte)
 - (c) Beweisen Sie die Rundungsfehlerabschätzung für die Lösung von $Rx = b$.
(4 Punkte)
- (2) *Numerische Lineare Algebra:*
- (a) Wie löst man ein lineares Gleichungssystem mit positiv definiten symmetrischer Koeffizientenmatrix A ? Wodurch unterscheidet sich das Verfahren vom Algorithmus der LR -Zerlegung? Besprechen Sie etwaige Unterschiede in der Konstruktion des Algorithmus, im Aufwand und in der numerischen Stabilität.
(3 Punkte)
 - (b) Was sind absolute und relative Fehler? Wie ist die Konditionszahl einer Matrix definiert?
(1 Punkt)
 - (c) Beweisen Sie, dass jede rechteckige Matrix eine Singulärwertzerlegung besitzt.
(4 Punkte)
- (3) *Lösung von Nullstellenproblemen, Interpolation:*
- (a) Welche Methoden zur Lösung eindimensionaler Nullstellenprobleme kennen Sie? Was sind ihre Vorteile und Nachteile? Wie schnell konvergieren Sie?
(3 Punkte)
 - (b) Definieren Sie die Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens (linear, quadratisch, etc.).
(1 Punkt)
 - (c) Was ist der Unterschied zwischen global und lokal konvergent?
(1 Punkt)
 - (d) Was bedeutet der Begriff Extrapolation? Welche Interpolationsverfahren, die Sie kennen, eignen sich zur Extrapolation und welche nicht? Geben Sie Begründungen.
(3 Punkte)
- (4) *Differentiation und Integration:*
- (a) Was sind interpolatorische Quadraturformeln, und wie werden sie konstruiert. Was sind die Newton-Côtes-Formeln?
(3 Punkte)

- (b) Was bedeutet automatische Differentiation? Was sind Differentialzahlen?
(1 Punkt)
- (c) Geben Sie den Vorwärtsdifferenzenquotienten an. Wie genau lässt sich mit seiner Hilfe (in nicht degenerierten Fällen) die Ableitung einer Funktion approximieren? Warum geht es nicht besser?
(2 Punkte)
- (d) Wie lässt sich die Approximationsgüte für numerische Differentiation durch Extrapolation verbessern? Welche Approximationsgüte kann man erreichen?
(2 Punkte)
- (5) *Differentialgleichungen, etc.:*
 - (a) Welche Verfahren zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen kennen Sie? Beschreiben Sie die Verfahren kurz.
(5 Punkte)
 - (b) Was ist eine steife Differentialgleichung? Wodurch unterscheiden sich Lösungsverfahren für steife Differentialgleichungen für solche für nicht-steife?
(2 Punkte)
 - (c) Ist die Determinante einer Matrix ein geeignetes Mittel, um numerisch deren Regularität zu untersuchen?
(1 Punkt)