Proseminar zu Optimierung und Variationsrechnung (WS 2004/05)

(17) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei C^1–Funktionen. Bestimme für die Optimierungsprobleme

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. } \; x \in [a, b] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. } \; F(x) \le 0 \\ &\qquad\; x \in [a, b] \end{aligned}$$

die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung, die notwendigen und die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung. Erkläre an Hand von Skizzen ihre geometrische Bedeutung. Vergleiche die Ergebnisse mit den Methoden zur Lösung von Extremwertaufgaben aus der Schule.

(18) Betrachte das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \;& -3(x_1 - 4)^2 - 5(x_2 - 3)^2 \\ \text{s.t. } \;& 3x_1 - 4x_2 \le 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 5 \\ & x_2 \ge -3 \\ & x_1 \ge -2 \end{aligned}$$

- (a) Bestimme die Menge der lokalen Minima.
- (b) Sind die Kuhn-Tucker Bedingungen am globalen Minimum erfüllt? Wenn ja, berechne die Lagrange-Multiplikatoren.
- (c) Sind die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung erfüllt?

(19) Sei eine C^1–Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben, und sei y so gewählt, dass $g(y) = 0$ und $\nabla g(y) \ne 0$ gelten.

- (a) Zeige, dass die Menge $F := \{x \mid g(x) = 0\}$ in einer Umgebung von y eine (gekrümmte) Hyperfläche ist.
- (b) Bestimme in einer Umgebung von y die lineare Approximation von F (die Bestapproximation von F durch eine affine Hyperfläche H).
- (c) Beweise, dass $\nabla g(y)$ orthogonal auf F steht. D.h. für jede in F verlaufende Kurve $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi([-1, 1]) \subset F$ und $\phi(0) = y$ gilt $\nabla g(y) \perp \phi'(0)$.
- (d) Steht $\nabla g(y)$ auch orthogonal auf H?
- (e) Zeige, dass F der topologische Rand der Menge $G = \{x \mid g(x) \le 0\}$ ist.
- (f) Beweise, dass $\nabla g(y)$ aus G hinauszeigt, d.h. für positives s klein genug gilt $y + s\nabla g(y) \notin G$.

(g) Zeichne die Umgebung des Punktes $y = (1,1)$ für das Beispiel $g(x) = x_1^2 - x_2^3$. Bestimme die Mengen F, G, H und $\nabla g(y)$.

(20) Konstruiere ein möglichst einfaches Optimierungsproblem der Form

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. } \ g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

das ein globales Minimum besitzt, in dem die Kuhn-Tucker-Bedingungen nicht erfüllt sind. Wie sieht es an dieser Stelle mit den Bedingungen zweiter Ordnung aus?