

16. Man gebe die disjunktive Normalform einer Schaltung an, welche das in der Schaltwerttabelle beschriebene Verhalten besitzt.

a	b	c	$f(a, b, c)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

17. *Äquivalente Aussagen.* Beweisen Sie, dass

$$(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

und formulieren Sie gemäß dieser Regel äquivalente Aussagen zu:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > n \Rightarrow n > 1$
 (b) $\forall n \in \mathbb{N} : 3|n \Rightarrow 4|n$
 (c) $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 \text{ ungerade} \Rightarrow n \text{ ungerade}$

Hinweis: Das Zeichen „|“ bedeutet „teilt“.

18. *Logik 1.* Wir betrachten die Aussagen p, q, r und s über deren Wahrheitswert wir folgendes wissen: p und s sind wahr, q und r sind falsch. Welche der folgenden Aussagen ist wahr und welche ist falsch?

- (a) $p \vee r$ (c) $\neg(p \vee q)$
 (b) $(r \wedge s) \vee q$ (d) $\neg s \vee \neg r$

19. *Logik 2.* Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie, welche eine Kontradiktion und welche keines von beiden?

- (a) $p \vee (\neg p \wedge q)$ (c) $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$
 (b) $p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ (d) $(p \vee (\neg p \vee q)) \vee \neg(q \wedge s)$

20. *Logik 3.* Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Wenn zwei Ebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.
 (b) Es gibt Dreiecke, die genau zwei rechte Winkel haben.

21. *Logik 4.* Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

- (a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x = y$,
- (b) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x = y$,
- (c) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y$,
- (d) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x = y$,
- (e) $\forall x \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} : \exists y \in \mathbb{R}^+ : x < y$
- (f) $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} : \exists y \in \mathbb{R}_0^+ : x \leq y$

22. *Verneinung.* Bilden Sie die Verneinung der folgenden Aussagen:

- (a) Alle Häuser sind zu teuer oder schon verkauft.
- (b) Alle Häuser sind entweder zu teuer oder schon verkauft.

Hinweis: Wir folgen hier der Konvention aus der Vorlesung, die Formulierung „entweder... oder“ als *ausschließendes Oder* (genau eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu interpretieren. Die Formulierung „oder“ ist natürlich als das (mathematische) *einschließende Oder* (mindestens eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu lesen. Falls Ihnen dieser Hinweis Kopfzerbrechen bereitet, dann wiederholen Sie schleunigst den entsprechenden Abschnitt aus der Vorlesung.

- (c) Es gibt Vierecke, die genau drei rechte Winkel haben.
- (d) Wenn zwei Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.

23. *Sinus und Cosinus.* Wiederholen Sie die Definition der Winkelfunktionen (Schulstoff, 6. Klasse AHS), und ihre Funktionsgraphen.

- (a) Bestimmen Sie alle reellen x , für die $\cos x = \frac{1}{2}$ gilt.
- (b) Bestimmen Sie alle $x \in [0, 2\pi]$, für die $\cos x = \frac{1}{2}$ gilt.
- (c) Bestimmen Sie alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt.
- (d) Bestimmen Sie alle $x \in [\pi, 2\pi]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt.
- (e) Bestimmen Sie alle $x \in [0, \pi]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
- (f) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
- (g) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\sin x = \frac{1}{2}$ gilt.

24. *Sinus- und Cosinussatz.*

- (a) Von einem Dreieck sind $c = 7$, $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, $\beta = \frac{2\pi}{5}$ gegeben. Berechnen Sie die übrigen Seiten und Winkel!
- (b) Von einem Dreieck sind $a = 128.3$, $b = 175.4$, $c = 91.4$ bekannt. Berechnen Sie die Winkel!

25. *Parallelogrammgleichung.* Zeigen Sie, dass in einem Parallelogramm die Summe der Quadrate aller (vier!) Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate der Längen der Diagonalen ist.

26. *Differenzieren.* Differenzieren Sie nach der angegebenen Variable.

- | | |
|---|-----------------------------|
| (a) $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k+1}$ | (e) $x(z) = \cos(\tan z)$ |
| (b) $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x}}$ | (f) $g(y) = \frac{dy}{y^d}$ |
| (c) $f(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x-\sqrt{x}}$ | (g) $g(d) = \frac{dy}{y^d}$ |
| (d) $x(y) = \sqrt{\frac{\cos y - 1}{\sin y + 1}}$ | (h) $h(x) = x^x$ |
| | (i) $h(x) = x^{x^2}$ |
| | (j) $h(x) = x^{x^x}$ |

27. *Kurvendiskussion 1.* Unter Diskussion des Graphen einer Funktion (Kurvendiskussion) verstehen wir die Bestimmung des (maximalen) Definitionsbereichs, der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte, Monotonie, Wendepunkte und des Krümmungsverhaltens. Diskutieren Sie die folgenden Funktionen und zeichnen Sie den Graphen (in einem „vernünftig“ gewählten Bereich).

- (a) $f(x) = \frac{2}{27}x^4 - \frac{4}{9}x^3$
- (b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2-16}$
- (c) $h(x) = \frac{x}{2} + 2 \sin x$ (Vorsicht: Für die Nullstellen können Sie nicht direkt die Gleichung lösen. Das ist nämlich nicht möglich.)

28. *Kurvendiskussion 2.*

- (a) Ermitteln Sie die Koeffizienten der Polynomfunktion dritten Grades $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c^x + d,$$

deren Graph im Ursprung den Wendepunkt und in $A = (2; \frac{2}{3})$ die Steigung $k_A = 3$ hat. Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie ihren Graphen im Intervall $[-3, 3]$.

- (b) Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 5}$$

hat in $P = (0, -5)$ die Steigung $k = \frac{16}{25}$. Ermitteln Sie die Koeffizienten a und b , diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen in $[-4; 12]$.