

PROSEMINAR ZU NUMERISCHE MATHEMATIK 1 (SS 2009)

- (66) Für die Funktion $f(x) = \cos x$ bestimmen Sie den Wert $\cos 0$, indem Sie das Interpolationspolynom P zu den Funktionswerten $(h; \cos h)$ für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, 0$ auswerten. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem wahren Fehler und mit dem Fehler aus Beispiel 65.
- (67) Studieren Sie Abschnitt 1.1.4 in Kapitel 5 des Skriptums über das Restglied der Polynominterpolation. Beweisen Sie die Abschätzung aus Theorem 1.1.9.
- (68) Diskutieren Sie, wie sich das Restglied der Polynominterpolation verhält, wenn der Punkt x innerhalb des Intervalls $[x_0, x_n]$ liegt, das von den Stützstellen erzeugt wird, und wenn er außerhalb liegt. Für welchen Wert außerhalb des Intervalls bleibt die Polynominterpolation brauchbar?
- (69) Verwenden Sie die zusammengesetzte Trapezregel, um das Integral

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$$

anzunähern, indem Sie einige Unterteilungen verwenden. Versuchen Sie $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}$. Wieviele verschiedene Punkte müssen Sie auswerten? Versuchen Sie, den wahren Wert herauszufinden.

- (70) Setzen Sie Beispiel 69 fort, indem Sie die berechneten Werte in einer polynomialen Extrapolation verwenden, um den Wert für $h = 0$ zu schätzen.
- (71) Wie Beispiel 70 nur mit rationaler Extrapolation.
- (72) Versuchen Sie das Integral aus Beispiel 69 mit Hilfe der zusammengesetzten Simpson-Formel und Extrapolation zu bestimmen. Wie viele Punkte benötigen Sie, um 8 approximative Werte zu berechnen? Wie genau wird das Ergebnis?
- (73) Studieren Sie Abschnitt 8.1 über automatische Differentiation aus Kapitel 6 des Skriptums. Präsentieren Sie das Thema in etwa 5–10 Minuten.
- (74) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen aus Beispiel 1 und 2 mittels automatischer Differentiation (vorwärts). Vergleichen Sie Aufwand und Genauigkeit der automatischen und numerischen Differentiation anhand der Beispiele.
- (75) Bestimmen Sie die Formeln für die Differentialzahlen zweiter Ordnung, d.h. für Tripel (f, f', f'') , und überprüfen Sie die Formeln, indem sie die ersten beiden Ableitungen von

$$f(x) = x^2 + 3\sqrt{\sin x - xe^{3x+4}}$$

an der Stelle $x = 1$ berechnen.

- (76) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung für die Funktion aus Beispiel 75 numerisch, d.h. mit Differenzenquotienten.
- (77) Verwenden Sie Polynom- und rationale Extrapolation zur Berechnung der zweiten Ableitung der Funktion f aus Beispiel 75 an $x = 1$. Vergleichen Sie Aufwand und Genauigkeit mit den Methoden zur automatischen Differentiation