Übungen zu „Numerische Mathematik“

Sommersemester 2012

W. Huyer

1) Bestimmen Sie mit Matlab (`format short`) den Wert der folgenden arithmetischen Ausdrücke und erklären Sie die Ergebnisse. Welche Klammern sind überflüssig?

a) `8/-6`	e) `(1e3-5e2)*(10-50e-1)`	i) `(((4.6e1*3)/2)-.77e2)^2`
b) `20/2/0.5e2`	f) `(1-2)^(2-1.2)`	j) `(8-3)^(3^(1/3))`
c) `(5^4)/2`	g) `4*3^2*2^3`	k) `(8-3)^3^(1/3)`
d) `5^(4/2)`	h) `(2*5)/(3^2-4)*6-9.6`	l) `((8-3)^3)^(1/3)`

2) Exekutieren Sie in Matlab die folgenden Befehle und erklären Sie ihren Zweck und die Resultate:

```
x = [2 3 4 5]
y = -1:2
x.^y
x.*y
x./y
A = rand(3)
B = [A zeros(size(A)); eye(size(A)) ones(size(A))]
C = sqrt(A)
D = C*C
E = C.*C
```

3) Geben Sie möglichst elegante Matlab-Anweisungen zum Abspeichern folgender Vektoren an:

   a) $(-1, -0.8, \ldots, 0.6, 0.8, 1)$
   b) $(2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots, 16, -16)$
   c) $(1, 2, \ldots, 8, 10, 13, 14, 15, \ldots, 19, 20)$
   d) $(1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots, 19, 20, 22, 23)$

4) Geben Sie möglichst elegante Matlab-Befehle zum Abspeichern der folgenden Matrizen an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -6 & 7 & -8 & 9 \\ 11 & -12 & 13 & -14 \\ -16 & 17 & -18 & 19 \end{pmatrix}$$

5) Geben Sie Matlab-Anweisungen an, um eine obere bzw. eine untere Dreiecksmatrix der Dimension 10 zu generieren, die 2 auf der Hauptdiagonale und -3 auf der zweiten oberen (bzw. unteren) Diagonale hat. (*Hinweis*: `help diag`.) Vertauschen Sie zuerst die dritte und siebenten Zeile dieser Matrizen und dann die vierte und achte Spalte.

6) Überprüfen Sie mit Matlab, ob die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^4$ linear abhängig sind: $v_1 = (0, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$.

7) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Matlab:

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z &= 5 \\ 2x + 2y + 3z &= 7 \\ x + 3y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

8) Beweisen Sie, dass i^i eine reelle Zahl ist, und überprüfen Sie das mit Matlab.

9) Plotten Sie die Funktionen $f(x) = (\sin x)^2$ und $g(x) = (\cos x)^3$ im Intervall $[0, 2\pi]$. Setzen Sie dazu die x-Grenzen auf $[0, 2\pi]$ und die y-Grenzen auf „vernünftige" Werte.

10) Das Integral $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, genügt der Rekursion (partielle Integration!)

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 - e^{-1}, \\ I_{n+1} &= 1 - (n+1)I_n, \quad n = 0, 1, \ldots . \end{aligned}$$

Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ und vergleichen Sie mit dem numerischen Resultat, indem Sie I_n, $n = 0, \ldots, 180$, mit einem Matlab-Programm mit der obigen Rekursion berechnen.

11) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion für die Berechnung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei n und k zwei nichtnegative ganze Zahlen mit $k \leq n$ sind. *Hinweis*: Mit der Matlab-Funktionen `mod` oder `rem` kann man überprüfen, ob eine Zahl eine ganze Zahl ist.

12) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die zu einer natürlichen Zahl n (Eingabeparameter) einen Vektor der Primzahlen zwischen 1 und n ausgibt (also z.B. `function p = prim(n)`).
Hinweis: Ein natürliche Zahl m ist genau dann eine Primzahl, wenn sie keinen Teiler $k \in [2, \sqrt{m}\,] \cap \mathbb{N}$ besitzt (verwenden Sie die Matlab-Funktion `rem` oder `mod`). Das Programm kann z.B. mit Hilfe einer doppelten `for`-Schleife mit geeignetem `break` realisiert werden.

13) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, um die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zu lösen. Die Funktion soll drei Eingabeparameter a, b, c haben und die Werte der zwei Wurzeln ausgeben. Sie sollten die folgenden Fälle berücksichtigen:

   a) keine reellen Wurzeln,
   b) reelle und verschiedene Wurzeln,
   c) gleiche Wurzeln,
   d) lineare Gleichung,
   e) $a = b = 0$ (sinnlose Eingabe).

14) Plotten Sie mit Matlab die Funktionen, die durch die folgenden drei arithmetischen Ausdrücke definiert sind:

   a) $f_1(x) = \dfrac{1}{1+2x} - \dfrac{1-x}{1+x}$ für $-1 < x \leq 1$ und für $|x| \leq 10^{-15}$,
   b) $f_2(x) = \sqrt{x + 1/x} - \sqrt{x - 1/x}$ für $1 \leq x \leq 10$ und für $2 \cdot 10^7 \leq x \leq 2 \cdot 10^8$,
   c) $f_3(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x}$ für $0 < x \leq 1$ und für $10^{-8} \leq x \leq 10^{-7}$.

Beachten Sie die starke Ungenauigkeit jeweils für die zweite Wahl.
Hinweis: Nicht über Singularitäten drüber zeichnen (Intervall teilen), „sinnvolle" y-Grenzen wählen!

15) Berechnen Sie die folgenden Funktionen und ihre Ableitungen an den Punkten $x = 2$ mit Hilfe von Differentialzahlen. Berechnen Sie für c) zur Probe einen Ausdruck für $f'(x)$ an $x = 2$.

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$,

b) $f(x) = \dfrac{e^x(x+1)}{\sqrt{x}}$,

c) $f(x) = \dfrac{(x^2+3)(x-1)}{x^2(x^2+4)} + \dfrac{x-1}{x+1}$.

16) Das Polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ werde am Punkt z mit Hilfe des Hornerschemas ausgewertet (mit den Bezeichnungen wie in der Vorlesung). Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i x^{n-i-1} = \begin{cases} f'(z) & \text{wenn } x = z, \\ \dfrac{f(x)-f(z)}{x-z} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst rekursiv, dass

$$f_i = \sum_{j=0}^{i} a_j z^{i-j} \quad \text{für } i = 0, \ldots, n.$$

17) Sei

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

ein Polynom n-ten Grades. Das *vollständige Hornerschema* ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f_i^{(0)} &:= a_i \quad (i = 0, \ldots, n), \\ f_j^{(j)} &:= a_0 \quad (j = 1, \ldots, n+1), \\ f_i^{(j)} &:= f_{i-1}^{(j)} z + f_{i-1}^{(j-1)} \quad (j = 1, \ldots, n+1,\ i = j+1, \ldots, n+1). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für die Polynome

$$g_j(x) := \sum_{i=j}^{n} f_i^{(j)} x^{n-i} \quad (j = 0, \ldots, n)$$

gilt:

a) $g_j(x) - g_j(z) = g_{j+1}(x)(x-z) \quad (j = 0, \ldots, n-1)$,

b) $f(x) = g_0(x) = \sum_{k=0}^{j-1} g_k(z)(x-z)^k + g_j(x)(x-z)^j \quad (j = 1, \ldots, n)$,

c) $f_{n+1}^{(j+1)} = g_j(z) = \dfrac{f^{(j)}(z)}{j!} \quad (j = 1, \ldots, n)$.

Hinweis: a) erhält man, indem man Bsp. 16 auf das Polynom $g_j(x)$ anwendet. Durch wiederholte Anwendung von a) auf $g_j(x)(x-z)^j$ folgt b). Teil c) erhält man, wenn man die Taylorentwicklung von $f(x)$ um z mit b) mit $j = n$ vergleicht.
Das vollständige Hornerschema kann zur Berechnung von höheren Ableitungen verwendet werden.

18) Schreiben Sie ein Programm für das vollständige Hornerschema und berechnen Sie damit für das Polynom

$$p(x) = 4x^4 - 8x^2 + 5x - 1$$

die Werte $p(x)$, $p'(x)$ und $p''(x)$ für $x = 2.5$ und für $x = 4/3$.

19) Ein Dualbruch der Form

$$r := (0.a_1 a_2 \dots a_k)_2$$

mit $a_\nu \in \{0, 1\}$ $(\nu = 1, \dots, k)$ kann dargestellt werden als

$$r = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu 0.5^\nu$$

mit $a_0 = 0$. Wandeln Sie den Dualbruch

$$(0.101\,100\,011)_2$$

mit Hilfe des Hornerschemas in eine Dezimalzahl um.

20) Auf einem Rechner mit L-ziffriger Mantisse, Basis $B \in \{2, 10\}$ und optimaler Rundung werde der folgende Algorithmus durchgeführt:

$$\begin{aligned} x &= 2/3, \\ y &= |3(x - 0.5) - 0.5|/25, \\ z &= \begin{cases} 1 & \text{falls } y = 0, \\ \dfrac{e^y - 1}{y} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

a) Welcher Wert ergibt sich für z? Was erhält man mit MATLAB? Begründen Sie die Abweichung vom exakten Ergebnis $z = 1$.

b) Konvergieren die numerisch ermittelten Werte von z für $L \to \infty$ gegen die Lösung $z = 1$?

Hinweis: Wenn $\tilde{x}$ der durch optimale Rundung von x, $B^{e-1} < x < B^e$ $(e \in \mathbb{Z})$, mit L-ziffriger Mantisse zur Basis B erhaltene Wert ist, so gilt $|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2} B^{e-L}$.

21) Berechnen Sie die Inverse der Matrix (Hilbertmatrix der Dimension 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

a) genau;

b) indem alle Operationen auf 3 Stellen gerundet werden.

22) Für einen Vektor `v` der Dimension n kann man mit `c=poly(v)` die Koeffizienten des Polynoms $\prod_{k=1}^{n}(x - \mathtt{v}(k))$ generieren. In exakter Arithmetik gilt `v = roots(poly(v))`. Durch Rundungsfehler kann das verletzt sein. Überprüfen Sie das, indem Sie `roots(poly(1:n))` für $n = 2, \dots, 25$ berechnen. Der Fall $n = 20$ ist das berühmte Beispiel von Wilkinson.

23) Es seien $w_0, x \in \mathbb{R}$, $w_0, x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und für $i = 0, 1, 2, \ldots$ definieren wir

$$\begin{aligned} \bar{w}_i &:= x/w_i^{n-1}, \\ w_{i+1} &:= ((n-1)w_i + \bar{w}_i)/n. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für $w_0 \neq \sqrt[n]{x}$

$$\bar{w}_1 < \bar{w}_2 < \cdots < \bar{w}_i < \cdots < \sqrt[n]{x} < \cdots < w_i < \cdots < w_2 < w_1$$

gilt und dass die Folgen $\{w_i\}$ und $\{\bar{w}_i\}$ gegen $w := \sqrt[n]{x}$ konvergieren.
Hinweis: Gleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel.

24) Seien die Folgen $\{w_i\}$ und $\{\bar{w}_i\}$ wie in Bsp. 23 gegeben.

a) Berechnen Sie für $x = 4$, $w_0 = 2$, $n = 3, 4$ in jedem Fall $w_i, \bar{w}_i$ $(i \leq 7)$ und drucken Sie die Werte von i, w_i und $\bar{w}_i$ in `format long` aus.

b) Berechnen Sie für $x = 4$, $w_0 = 2$, $n = 25, 50, 75, 100$ in jedem Fall $w_i, \bar{w}_i$ $(i \leq n)$ und drucken Sie die Werte von i, w_i und $\bar{w}_i$ in `format long` aus. Schließen Sie aus diesen Resultaten, dass die Iteration für die praktische Berechnung von $\sqrt[n]{x}$ für große n ungeeignet ist.

25) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $y_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$.

Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 0$ gilt: $y_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - 5y_n$, und berechnen Sie die y_n für $0 \leq n \leq 25$ mit dieser Rekursion. Was fällt dabei auf?

26) (Wie man e^x nicht berechnen soll.) Zu gegebenem $x \in \mathbb{R}$ soll der Wert e^x mit Hilfe der Reihenentwicklung $e^x = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$ näherungsweise bestimmt werden. Dazu berechnet man die Partialsummen $s_n(x) := \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Für $x = -20$ soll durch eine Restgliedabschätzung ein n angegeben werden, für das der absolute Fehler $|s_n(x) - e^x| < 10^{-16}$ wird. Berechnen Sie `u` $= s_n(-20)$ für dieses n, `v=exp(-20)` und `v-u` mit MATLAB. Wie ist das schlechte Ergebnis zu erklären?

27) Formen Sie die arithmetischen Ausdrücke von Bsp. 14 so um, dass ein möglichst kleiner Genauigkeitsverlust entsteht für $|x| \ll 1$ für a), für $x \gg 1$ für b) und für $0 < |x| \ll 1$ für c).
Berechnen Sie $f_1(x)$ für $x = 10^{-3}$, $B = 10$ und $L = 1, 2, 4, 8$ mit der Hand und vergleichen Sie die erhaltenen Werte für den ursprünglichen und den umgeformten Ausdruck.

28) Betrachten Sie die Folge

$$z_2 = 2, \quad z_{n+1} = 2^{n-1/2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} z_n^2}}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

die für $n \to \infty$ gegen π konvergiert. Berechnen Sie z_n und $|z_n - \pi|$ für $n = 3, \ldots, 32$ mit MATLAB und drucken Sie es in `format long` aus.

29) Welche der folgenden Ausdrücke sind instabil? Geben Sie im instabilen Fall eine stabile Version des Ausdruckes an.

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $\quad x$ positiv und klein

b) $\sin(x+c) - \sin(x)$, $\quad x \approx -\frac{\pi}{2}$, $\quad c$ klein

c) $\arctan(a+1) - \arctan(a)$, $\quad a$ klein

d) $\dfrac{1}{1+3x} - \dfrac{1-2x}{1+x}$, $\quad x$ groß

e) $\dfrac{1-\cos x}{x}$, $\quad x \approx \pi$

f) $\dfrac{1}{\cosh x - \sinh x}$, $\quad x$ positiv und groß

g) $\dfrac{1}{\cosh x - \sinh x}$, $\quad x$ negativ und groß

h) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\quad x$ groß

i) $1 - \sqrt{1 - 2^{-n}\pi}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ groß

j) $\sqrt{\tan^2 x - \sin^2 x}$, $\quad x$ klein

30) Für die Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$a \neq 0$, gilt bekanntlich

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von dieser Formel die kleinere Lösung der Gleichung

$$x = (1 - \alpha x)^2 \quad (\alpha > 0).$$

Warum ist diese Formel instabil für kleine Werte von α? Leiten Sie eine bessere Formel für kleine α her.

31) Zu gegebenen Messwerten x_i $(i = 1, \ldots, n)$ kann man die Standardabweichung $\sigma_n = \sqrt{t_n/n}$ entweder mit Hilfe von

$$t_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) - \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2$$

berechnen oder mit der folgenden Rekursion: Wir setzen $s_1 = x_1$, $t_1 = 0$ und berechnen für $i = 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \delta_i &= x_i - s_{i-1}, \\ s_i &= s_{i-1} + \delta_i/i, \\ t_i &= t_{i-1} + \delta_i(x_i - s_i). \end{aligned}$$

a) Verifizieren Sie, dass man mit der Rekursion tatsächlich denselben Wert t_n erhält.

b) Berechnen Sie σ_{201} für die Werte $x_i = (499999899 + i)/3000$ $(i = 1, \ldots, 201)$ mit beiden Methoden und vergleichen Sie beide Ergebnisse mit dem exakten Wert, den man durch analytische Summation erhält.

Hinweis: Verwenden Sie $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

32) Eine Feder mit angehängter Masse m schwinge um die Ruhelage, wobei das Hooke'sche Gesetz $K(t) = -Dx(t)$ erfüllt sei. Zusätzlich wirke auf die Masse m die äußere Kraft $K_a(t) := A\cos(\omega_a t)$. Mit $\omega_0^2 := D/m$ lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{A}{m}\cos(\omega_a t).$$

Sie hat die Lösung

$$x(t) = -\frac{A/m}{\omega_a^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_a t).$$

Für welche ω_a ist das Problem schlecht konditioniert ($t > 0$ und $\omega_0 > 0$ fest)?

33) Gegeben sind die beiden linearen Gleichungssysteme

$$Ax = b^{(l)}, \quad l = 1, 2,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 35 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie von Hand die Dreieckszerlegung $A = LR$ und berechnen Sie daraus die (exakten) Lösungen $x^{(l)}$ ($l = 1, 2$), indem Sie die entsprechenden dreieckigen Gleichungssysteme lösen.

b) Berechnen Sie die Fehler $\tilde{x}^{(l)} - x^{(l)}$ der Approximation $\tilde{x}^{(l)} = A\backslash b^{(l)}$, die mit der Standardlösung $x = A\backslash b$ von $Ax = b$ in Matlab berechnet wurde.

34) Verwenden Sie den Backslash-Operator in Matlab, um die Gleichungssysteme $Ax = b$ mit rechter Seite $b = Ae$ ($e := (1, 1, 1, 1)^T$) und $A = B^k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, für

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 8 & 11 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \\ 8 & 5 & 7 & 6 \\ 11 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Wie genau sind die Lösungen?

35) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das die Dreieckzerlegung ohne Pivotsuche durchführt, wenden Sie es auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 0.5 \cdot 10^{-15} & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

an, berechnen Sie $A - LR$ und begründen Sie das Resultat.

36) Es sei eine Dreieckszerlegung $A = LR$ der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben. Sei $B = A + uv^T$ mit $u, v \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Bx = b$ ($b \in \mathbb{C}^n$) mit nur $O(n^2)$ zusätzlichen Operationen gelöst werden kann.
Hinweis: Wenn in der Gleichung $(A + uv^T)x = b$ die Abkürzung $\lambda := v^T x$ eingeführt wird, kann man x durch A, u, v und λ ausdrücken. Indem man diesen Ausdruck für x in die Definition von λ einsetzt, kann man λ explizit berechnen. Dann kann man x durch $A^{-1}b$ und $A^{-1}u$ ausdrücken, d.h. durch die Lösungen von zwei Gleichungssystemen mit Koeffizientenmatrix A.

37) a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, aber keine Dreieckszerlegung besitzt.

b) Geben Sie eine Permutationsmatrix P an, sodass PA eine nichtsinguläre Dreieckszerlegung hat, und geben Sie diese Dreieckszerlegung an.

38) a) Finden Sie eine explizite Formel für die Dreieckszerlegung der Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & I \\ -B & I & & 0 & 0 \\ 0 & -B & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -B & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nd\times nd},$$

wobei die Einheitsmatrizen und die Matrizen $-B$ in $\mathbb{R}^{d\times d}$ sind.

Hinweis: Machen Sie den Ansatz

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -B & I & \ddots & & \vdots \\ 0 & -B & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -B & L' \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & C_1 \\ 0 & I & \ddots & \vdots & C_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & I & C_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R' \end{pmatrix}$$

mit $C_1, \ldots, C_{n-1}, L', R' \in \mathbb{R}^{d\times d}$, L' linke untere Dreiecksmatrix, R' rechte obere Dreiecksmatrix.

b) Zeigen Sie, dass die Spaltenpivotsuche in den ersten $(n-1)d$ Zeilen keine Zeilenvertauschungen produziert, wenn alle Einträge von B vom Betrag < 1 sind.

c) Zeigen Sie, dass für eine Matrix B mit konstanten Einträgen β mit $d^{-1} < \beta < 1$ einige Einträge des oberen Dreiecksfaktors R exponentiell mit n wachsen.

d) Überprüfen Sie die Gültigkeit von a)–c) mit einem Matlab-Programm für selbst gewählte Matrizen dieser Form, indem Sie `lu` von Matlab verwenden.

39) Eine (nicht notwendigerweise symmetrische) $n \times n$-Matrix A heißt *diagonal dominant*, wenn $|A_{jj}| > \sum_{k\neq j} |A_{jk}|$ für $j = 1, \ldots, n$.
Zeigen Sie: Eine symmetrische, diagonal dominante Matrix A mit $A_{jj} > 0$, $j = 1, \ldots, n$, ist positiv definit.

40) Bestimmen Sie eine Gerade $p_1(x) := a_0 + a_1 x$ und eine Parabel $p_2(x) := b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ so, dass $\sum_{j=1}^{7} (p_i(x_j) - y_j)^2$ minimal wird für $i = 1, 2$. Dabei entnehme man die Werte (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, 7$, der folgenden Tabelle:

x_j	0.04	0.32	0.51	0.73	1.03	1.42	1.60
y_j	2.03	1.18	1.16	1.54	2.65	5.41	7.60

41) a) Zeigen Sie, dass man die Schritte 2 und 3 im Algorithmus für Matrixinversion mit nur $\frac{4}{3}n^3 + O(n^2)$ Operationen realisieren kann.

b) Verwenden Sie den Algorithmus, um (mit der Hand) die Inverse der Matrix aus Bsp. 33 zu berechnen, ausgehend von der berechneten Dreieckszerlegung.

Hinweis zu a): Siehe Hinweis zu Bsp. 31.

42) a) In Schritt 4 des Algorithmus für die Matrixinversion müssen die Vertauschungen, durch die man die Permutationsmatrix erhält, auf die Spalten und in umgekehrter Reihenfolge angewendet werden. Warum?

b) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das den Algorithmus verwirklicht (verwenden Sie Bsp. 41) und wenden Sie es an, um die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

zu berechnen. Bestimmen Sie dabei die LR-Zerlegung mit `[L,R,P]=lu(A)`. Vergleichen Sie mit der eingebauten MATLAB-Routine `inv(A)`.

43) Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{C}^n$ äquivalent sind, d.h., wenn $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei beliebige Normen auf $\mathbb{C}^n$ sind, dann gibt es immer Konstanten $0 < c, d \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{C}^n$

$$c\|x\| \leq \|x\|' \leq d\|x\|.$$

Was sind die bestmöglichen Konstanten (größtmögliches c, kleinstmögliches d) für Paare von p-Normen ($p = 1, 2, \infty$)?

44) Beweisen Sie für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Folgendes:

a) Wenn $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$ mit einem $\gamma > 0$ und einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|$, dann existiert A^{-1}, und es gilt $\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$ für die zur Vektornorm $\|\cdot\|$ gehörige Matrixnorm.

b) Wenn $x^H Ax \geq \gamma\|x\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$ mit einem $\gamma > 0$, dann gilt $\|A^{-1}\|_2 \leq \gamma^{-1}$.

c) Wenn der Nenner auf der rechten Seite der folgenden zwei Ausdrücke positiv ist, dann gilt:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq 1/\min_i\Big(|A_{ii}| - \sum_{k\neq i}|A_{ik}|\Big),$$
$$\|A^{-1}\|_1 \leq 1/\min_k\Big(|A_{kk}| - \sum_{i\neq k}|A_{ik}|\Big).$$

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt $|x^H y| \leq \|x\|_2\|y\|_2$.

45) Sei x^* die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{7}x_2 &= \frac{10}{21}, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{29}{280}x_2 &= \frac{99}{280}. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Berechnen Sie (mit der Hand) die Konditionszahl der Koeffizientenmatrix für die Zeilensummennorm (∞-Norm).

b) Bei Darstellung der Koeffizienten A_{ik} mit drei Stellen hinter dem Dezimalpunkt möge (1) die folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} 0.333x_1 + 0.143x_2 &= 0.477, \\ 0.250x_1 + 0.104x_2 &= 0.353. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Lösung von (2) sei $\tilde{x}$. Berechnen Sie den relativen Fehler $\|x^* - \tilde{x}\|/\|x^*\|$ aus den *exakten* Lösungen x^* und $\tilde{x}$ von (1) bzw. (2) (Rechnung mit der Hand mit Brüchen). *Bemerkung:* Mit optimal gerundeter rechter Seite (0.476 und 0.354) erhält man x^* als Lösung von (2).

46) Verwenden Sie die MATLAB-Funktion `cond`, um die Konditionszahlen der Matrizen A mit $A_{ik} = f_k(x_i)$ ($k = 1, \dots, n+1$, $i = 1, \dots, n+1$), $x_i = (i-1)/n$ für $n = 5$, 10 und 15 und die folgenden Polynombasen (für den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$) zu berechnen:

   a) $f_k(x) = x^{k-1}$,
   b) $f_k(x) = (x - \frac{1}{2})^{k-1}$,
   c) $f_k(x) = T_{k-1}(2x-1)$, wobei $T_k(x) := \cos(k \arccos x)$ das k-te Tschebyscheff-Polynom ist,
   d) $f_k(x) = \prod_{j=n+3-k,\ j \text{ gerade}}^{n+k} (x - x_{j/2})$.

   Plotten Sie in jedem Fall einige Basisfunktionen auf $[0,1]$. (Nur die Basen mit kleinen Konditionszahlen sind geeignet, um für einen Kleinste-Quadrate-Fit verwendet zu werden.)

47) a) Implementieren Sie eine auf der MATLAB-Operation $x = A\backslash b$ zur Lösung von $Ax = b$ basierende Nachiteration.
   b) Testen Sie das Programm mit den Hilbert-Matrizen $A_{ik} = 1/(i+k-1)$ (vgl. Bsp. 21) der Dimension $n = 5$, 10, 15, 20 (`hilb(n)`) und der rechten Seite $b = e$ (Vektor mit nur Einsern). Nach wievielen Schritten Nachiteration ist das Abbruchkriterium in diesen Fällen erfüllt?
   c) Sei $x = A\backslash b$ und $\tilde{x}$ der nach der Nachiteration erhaltene Vektor. Vergleichen Sie die Qualität dieser Lösungen von $Ax - b$ (z.B. durch Berechnung von $\|Ax - b\|$ und $\|A\tilde{x} - b\|$ für eine Norm Ihrer Wahl oder Vergleich mit der „exakten“ Lösung; für $n = 5, 10$ ist `invhilb(n)` noch einigermaßen exakt, bzw. Verwendung von Mathematica).
   d) Die Hilbertmatrizen sind ein Paradebeispiel für schlecht konditionierte Matrizen. Für wachsendes n sind sie immer schlechter konditioniert. Verifizieren Sie das, indem Sie die Konditionszahlen für die Dimensionen $n = 5$, 10, 15 und 20 berechnen. Wie erklärt das die Resultate von c)?

48) Schreiben ein Programm, das für eine gegebene Funktion und n gegebene paarweise verschiedene Stützpunkte das Newton-Interpolationspolynom vom Grad $\leq n-1$ (d.h. die dividierten Differenzen) berechnet, und ein zweites Programm, das das Newton-Interpolationspolynom auswertet.

49) Verwenden Sie die Programme aus Bsp. 48 für die folgenden Fragestellungen.

   a) Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = e^{x/10}$ an den äquidistanten Stützstellen $x_i := -5 + 10i/n$, $i = 0, \dots, n$, und plotten Sie für $n = 1, 4, 8, 16$ f und das Interpolationspolynom p_n auf $[-5, 5]$.
   b) Berechnen Sie durch Auswertung von p_n und f an 101 äquidistanten Stellen ein Maß für den maximalen Fehler
   $$\max_{x \in I} |p_n(x) - f(x)|$$
   für die Intervalle $I = [-1, 1]$ und $I = [-5, 5]$.

50) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hinreichend differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass für die dividierten Differenzen gilt:

$$\frac{d}{dx_i} f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n]$$

für $i = 0, \dots, n$.

b) Finden und beweisen Sie einen analogen Ausdruck für $\frac{d^k}{dx_i^k} f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

51) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Polynome als

$$L_j(x) = q[x, x_j]/q[x_j, x_j]$$

geschrieben werden können mit $q(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$.

52) Sei $d_i := f[x_0, \dots, x_i]$ und

$$A_n := \begin{pmatrix} x_0 & & & 0 & -d_0 \\ 1 & x_1 & & & -d_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_{n-2} & -d_{n-2} \\ 0 & & & 1 & d_n x_{n-1} - d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad D_n := \operatorname{diag}(1, \dots, 1, d_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie, dass das Newton-Interpolationspolynom für f an $x_0, \dots, x_n$ durch $p_n(x) = \det(D_n x - A_n)$ gegeben ist ($n \geq 2$).

53) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_{20}(x)$ für die Funktion $f(x) = \sin(2\pi x)$ mit den äquidistanten Stützstellen $x_i := -1 + i/10$, $i = 0, \dots, 20$ und das Interpolationspolynom $\tilde{p}_{20}(x)$ für die gestörten Daten $\tilde{f}(x_i) := \sin(2\pi x_i) + (-1)^{i+1} 10^{-4}$, $i = 0, \dots, 20$. Plotten Sie die Graphen von f, p_{20} und $\tilde{p}_{20}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ und berechnen Sie mit Hilfe der Auswertung an 2001 äquidistanten Punkten Schätzwerte für $\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_{20}(x)|$ und $\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - \tilde{p}_{20}(x)|$.

54) Gegeben seien $(x_0, y_0, y_0') := (-1, -3, 19)$, $(x_1, y_1, y_1') := (0, 0, -1)$ und $(x_2, y_2, y_2') := (1, 3, 19)$. Bestimmen Sie (mit der Hand mit dividierten Differenzen) das Hermite-Interpolationspolynom $p(x)$ vom Grad 5 mit $p(x_i) = y_i$ und $p'(x_i) = y_i'$, $i = 0, 1, 2$.

55) Die Tschebyscheff-Punkte

$$x_j := \cos \frac{2j + 1}{2(n + 1)} \pi, \quad j = 0, \dots, n,$$

minimieren den Ausdruck

$$\max_{x \in [-1,1]} |q_n(x)|,$$

wobei $q_n(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_n)$.
Zeigen Sie das für $n = 1$ und drücken Sie x_0 und x_1 mit Hilfe von Wurzelausdrücken aus.

56) Es sei $f(x) := \dfrac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1]$.

a) Bestimmen Sie für $n = 4, 6, 8, 10$ das Interpolationspolynom p_n zu den äquidistanten Stützstellen $x_i := -1 + 2i/n$, $i = 0, \dots, n$. Plotten Sie f und p_n, $n = 4, 6, 8, 10$, und berechnen Sie wie in Bsp. 53 ein Maß für den maximalen Fehler.

b) Analog für die Tschebyscheff-Punkte $x_i = \cos(\frac{2i+1}{2(n+1)} \pi)$, $i = 0, \dots, n$.

57) Sei $f(x) := e^x$. Berechnen Sie mit Hilfe von a) Vorwärts-Differenzenquotienten und b) zentralen Differenzenquotienten Näherungswerte für $f'(1)$ für die Schrittweiten $h = 10^{-i}$, $i = 1, \ldots, 15$, und die Fehler $|f[1, 1+h] - e|$ bzw. $|f[1-h, 1+h] - e|$. Was ist jeweils die optimale Schrittweite?

58) Es sei $S(x)$ ein kubischer Spline über dem durch $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ gegebenen Gitter mit

$$S(x) = \alpha_j + \beta_j(x - x_j) + \gamma_j(x - x_j)(x - x_{j+1}) + \delta_j(x - x_j)^2(x - x_{j+1}) \qquad (3)$$

für $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebenen $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, und gegebenem Gitter die Splinefunktion $S(x)$ an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$ auswertet. Pro Argument sollen dabei nur 3 Multiplikationen verwendet werden. *Hinweis*: Imitieren Sie das Horner-Schema!

59) Zu einem gegebenen Gitter $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ und gegebenen Funktionswerten $f(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, soll ein kubischer Spline $S(x)$ der Form (3) mit $S(x_j) = f(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, bestimmt werden. Die Koeffizienten $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ ($j = 1, \ldots, n-1$) kann man aus den $f(x_i)$ und den Momenten $m_i := \frac{1}{6}S''(x_i)$ berechnen, und zwar gilt $\alpha_j = f(x_j)$, $\beta_j = f[x_j, x_{j+1}]$, $\gamma_j = 2m_j + m_{j+1}$, $\delta_j = (m_{j+1} - m_j)/h_j$, $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, wobei die Momente m_j dem Gleichungssystem

$$(1 - q_j)m_{j-1} + 2m_j + q_j m_{j+1} = f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}], \quad j = 2, \ldots, n-1, \qquad (4)$$

genügen mit $q_j := h_j/(h_{j-1} + h_j)$, $j = 2, \ldots, n-1$. Zusätzlich sei $S(x)$ bei x_2 und x_{n-1} knotenfrei, was zu den zusätzlichen Bedingungen

$$\Big(1 - \frac{h_2}{h_1}\Big)m_1 + \Big(2 + \frac{h_2}{h_1}\Big)m_2 = f[x_1, x_2, x_3]$$

und

$$\Big(2 + \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}\Big)m_{n-1} + \Big(1 - \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}\Big)m_n = f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$$

führt, und insgesamt erhält man ein tridiagonales Gleichungssystem $Am = d$ für $m := (m_1, \ldots, m_n)^T$.

a) Schreiben Sie ein Programm, das zum Gitter x_j und den Funktionswerten $f(x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, die Koeffizienten $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, berechnet (γ_j und δ_j aus den Momenten, wobei das Gleichungssystem $Am = d$ einfach mit dem Backslash-Operator gelöst werden soll).

b) Testen Sie das Programm durch Interpolation der Funktion $f(x) = \cosh x$, $x \in [-2, 2]$, an den äquidistanten Punkten $x_j := -2 + (j-1)h$ für $h = 0.4$ und $j = 1, \ldots, 11$. Plotten Sie $f(x)$ und $S(x)$ mit Hilfe von Bsp. 58 und berechnen Sie mit Hilfe der Auswertung von $|f(x) - S(x)|$ an einem engen äquidistanten Gitter (z.B. mit Schrittweite 0.01) einen Schätzwert für den Fehler $\max_{x \in [-2,2]} |f(x) - S(x)|$.

60) Ein kubischer Spline S, der auf einem Gitter $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ interpoliert, heißt *natürlicher Spline*, wenn für die Momente gilt: $m_1 = m_n = 0$ (bzw. $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$). Auch hier erhält man die Momente m_i aus einem linearen tridiagonalen Gleichungssystem und daraus die Koeffizienten $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, in (3) wie in Bsp. 59.

a) Schreiben Sie das aus (4) und $m_1 = m_n = 0$ resultierende Gleichungssystem für $m_2, \ldots, m_{n-1}$ hin.

b) Analog zu Bsp. 59 a) für den natürlichen Spline.

c) Berechnen Sie für $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1,1]$, eine natürliche kubische Spline-Interpolierende zum äquidistanten Gitter $x_i = -1 + 2(i-1)/n$, $i = 1,\dots,n$, für $n = 6, 11$ und plotten Sie f, S_6 und S_{11}.

61) Auf dem Intervall $[-1,1]$ seien die Knoten $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ gegeben. Welche Eigenschaften eines natürlichen kubischen Splines bezüglich der zugehörigen Zerlegung besitzt die folgende Funktion, und welche besitzt sie nicht?

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) + (x+1)^3 & \text{für } -1 \le x \le 0, \\ 4 + (x-1) + (x-1)^3 & \text{für } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

62) Wiederholen Sie Bsp. 53 mit den natürlichen kubischen Spline-Interpolierenden S und $\tilde{S}$ und schließen Sie daraus, dass der kubische Spline weniger empfindlich auf kleine Störungen reagiert als das Lagrange-Interpolationspolynom.

63) Beweisen Sie die Fehlerabschätzung

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \quad \xi \in [a,b],$$

für die *Rechteckregel* (oder *Mittelpunktsregel*), wenn f als zweimal stetig differenzierbar auf dem Intervall $[a,b]$ vorausgesetzt wird.

64) Eine Quadraturformel vom Typ $\sum_{j=1}^n \alpha f(x_j)$ für $\int_a^b f(x)\,dx$, bei der alle Gewichte gleich sind und die für Polynome $p(x)$ vom Grad $\le n$ exakt ist, heißt *Tschebyscheff'sche Quadraturformel*. Bestimmen Sie Stützstellen und Gewichte solcher Quadraturformeln für $n = 1, 2, 3$. (Solche Quadraturformeln existieren nur für $n \le 7$ und $n = 9$.)
Hinweis: Die Stützstellen müssen immer symmetrisch um den Mittelpunkt liegen. Machen Sie also für $n = 2$ den Ansatz $x_1 = \frac{a+b}{2} - \delta$, $x_2 = \frac{a+b}{2} + \delta$ und für $n = 3$ den Ansatz $x_1 = \frac{a+b}{2} - \delta$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = \frac{a+b}{2} + \delta$.

65) Seien das Intervall $[a,b]$ und die Knoten $x_j := a + jh$, $j = 0,1,2,3$, mit $h := (b-a)/3$ gegeben. Leiten Sie eine Quadraturformel $Q(f) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i f(x_i)$ her, die Polynome vom Grad ≤ 3 exakt integriert (*Newton'sche $\frac{3}{8}$-Regel*). Ist $Q(f)$ auch für Polynome vom Grad 4 exakt?

66) Zur näherungsweisen Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$, $f \in C^6[0,1]$, können die folgenden Verfahren angewendet werden ($h := (b-a)/N$):

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{\nu=1}^{N-1} f(a+\nu h) + \frac{1}{2}f(b)\right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi_1),$$

(*zusammengesetzte Trapezregel*),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{\nu=1}^{N-1} f(a+\nu h) + 4\sum_{\nu=1}^{N} f\Big(a + \frac{(2\nu-1)h}{2}\Big) + f(b)\right) - \frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi_2)$$

(*zusammengesetzte Simpsonregel*),

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{90}\left(7f(a) + 32\sum_{\nu=1}^{2N} f\Big(a + \frac{(2\nu-1)h}{4}\Big) + 12\sum_{\nu=1}^{N} f\Big(a + \frac{(2\nu-1)h}{2}\Big)\right.$$
$$\left. + 14\sum_{\nu=1}^{N-1} f(a+\nu h) + 7f(b)\right) - \frac{(b-a)h^6}{1935360} f^{(6)}(\xi_3)$$

(*zusammengesetzte Milne-Regel*) mit $\xi_i \in [a,b]$, $i = 1,2,3$.

a) Sei $f(x) := x^{13/2}$. Bestimmen Sie für jedes der drei Verfahren das kleinste N derart, dass die Absolutbeträge der Restglieder $\leq 10^{-4}$ sind. Wieviele Funktionsauswertungen sind mit diesem N bei der numerischen Berechnung jeweils auszuführen?

b) Schreiben Sie ein Programm für das gemäß a) günstigste Verfahren und berechnen Sie damit eine Näherung für das Integral $\int_0^1 x^{13/2}\,dx$ mit der gewünschten Genauigkeit. Vergleichen Sie mit dem exakten Wert von $\int_0^1 x^{13/2}\,dx$.

67) Schreiben Sie ein Programm, um eine Approximation des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der zusammengesetzten Simpsonregel zu berechnen, und benutzen Sie es, um $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ mit einem absoluten Fehler $\leq 10^{-5}$ zu berechnen. Wieviele äquidistante Punkte sind hinreichend, wenn Rundungsfehler vernachlässigt werden? Berechnen Sie auch $S_N(f) - \frac{\pi}{4}$.

68) Schreiben Sie auch noch ein Programm für die zusammengesetzte Trapezregel. Bestimmen Sie jeweils ein N, um die folgenden Integrale mit der zusammengesetzten Trapez- und Simpsonregel mit einem absoluten Fehler $\leq 10^{-4}$ zu berechnen. Berechnen Sie die zugehörigen Fehlerschranken gemäß Bsp. 66 und die Approximationen und vergleichen Sie sie mit den exakten Werten für $\int_a^b f(x)\,dx$.

a) $\int_{-1}^1 e^x\,dx$, b) $\int_0^1 e^{-x}\,dx$, c) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$, d) $\int_0^{\pi/3} x\cos(x)\,dx$.

69) Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = 2y$, $y(0) = 1$.

a) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an.

b) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die Näherungswerte y^i beim Euler-Verfahren mit Schrittweite h an.

c) Wie groß ist n zu wählen, damit der relative Fehler $\leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ in $[0,1]$ ist für $h = \frac{1}{n}$?

d) Führen Sie n Schritte mit dem in c) bestimmten n und h durch, lassen Sie sich y^i und $|y^i - y(\frac{i}{n})|$ für $i = 1, \ldots, 10$ ausgeben und bestimmen Sie $\max_{1\leq i\leq n} |y^i - y(\frac{i}{n})|$.

70) Die Funktion $y(t) = t^2/4$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Die Anwendung des Euler-Verfahrens liefert jedoch $y^i = 0$ für alle i und $h > 0$. Verifizieren Sie dieses Verhalten und erklären Sie es.

71) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) = -y(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Berechnen Sie eine Näherung für $y(0.4)$ und vergleichen Sie sie mit dem wahren Wert, indem Sie

a) die Differentialgleichung in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung umformen und das Euler-Verfahren mit Schrittweite $h = 0.1$ anwenden;

b) die folgende Rekursion verwenden, die von einer abgeschnittenen Taylorentwicklung abgeleitet ist:

$$\begin{aligned} y^0 &:= y(0), \\ z^0 &:= y'(0), \\ y^{i+1} &:= y^i + hz^i + \frac{h^2}{2}F(t_i, y^i), \\ z^{i+1} &:= z^i + hF(t_i, y^i), \quad i = 0, \ldots, 3, \quad h = 0.1, \end{aligned}$$

wobei $F(t,y) := -y$. Interpretieren Sie diese Regel geometrisch.

72) Das Adams-Bashforth-Verfahren der Ordnung 3 (mit konstanter Schrittweite h) für ein Anfangswertproblem $y' = F(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, ist gegeben durch

$$y^{i+1} := y^i + \frac{h}{12}(23F(t_0+(i-1)h, y^{i-1}) - 16F(t_0+(i-2)h, y^{i-2}) + 5F(t_0+(i-3)h, y^{i-3}))$$

für $i \geq 2$. Wenden Sie dieses Verfahren auf das Anfangswertproblem aus Bsp. 69 für $h = 0.01$ auf dem Intervall $[0, 1]$ an mit

a) $y^0 = 1$, $y^1 = e^{2h}$, $y^2 = e^{4h}$ (korrekte Werte),

b) $y^0 = 1$, $y^1 = (1 + 2h^3)^{10000}$, $y^2 = (1 + 2h^3)^{20000}$ (Euler-Näherungen mit Schrittweite h^3 für y^1 und y^2).

Tabellieren Sie jeweils die Näherung y^{10i}, den exakten Wert $y(\frac{i}{10})$ und den Fehler $y^{10i} - y(\frac{i}{10})$ für $i = 1, \dots, 10$ und berechnen Sie den maximalen Fehler $\max_{1\leq i\leq 100} |y^i - y(\frac{i}{100})|$.

73) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = t - t^3, \quad y(0) = 0.$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung $y(t)$ und die mit dem Euler-Verfahren und mit dem Adams-Bashforth-Verfahren aus Bsp. 72 (mit exakten Anfangsdaten) bestimmten Näherungslösungen für die Schrittweite $h = 0.01$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Tabellieren Sie $y(\frac{i}{10})$ und die zugehörigen Approximationen (4 Nachkommastellen) und bestimmen Sie die maximalen Fehler beider Verfahren.

74) Benutzen Sie zur Bestimmung der Nullstelle $x^* = \sqrt{2}$ von $f(x) := x^2 - 2$ im Intervall $[0, 2]$ die folgende Variante des Sekantenverfahrens:

% Setzen der Startwerte
$\underline{x}_0 = 0$; $\bar{x}_0 = 2$; $i = 0$;
while 1
  $x = \bar{x}_i - f(\bar{x}_i)/f[\bar{x}_i, \underline{x}_i]$
  if $f(\underline{x}_i)f(x) > 0$
    $\underline{x}_{i+1} = x$; $\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i$;
  else
    $\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i$; $\bar{x}_{i+1} = x$;
  end
  $i = i + 1$;
end

Drucken Sie i, $\underline{x}_i$ und $\bar{x}_i$ für $i = 1, 2, \dots, 6$ zu 5 Dezimalen aus und führen Sie die Iteration durch, bis $|x - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$. Interpretieren Sie die Resultate!

75) a) Bestimmen Sie die Nullstelle von $f(x) = \log x + e^x - 100x$ im Intervall $[1, 10]$ mit dem Sekantenverfahren und dem Sekantenbisektionsverfahren mit $x_1 = 1$ und $x_2 = 10$. Verwenden Sie für das Sekantenbisektionsverfahren das Programm `secbis.m` von `http://www.mat.univie.ac.at/~huyer/secbis.m` (von Prof. Neumaier) und schreiben Sie für das Sekantenverfahren selbst ein Programm. Drucken Sie für beide Verfahren i und x_i ($i = 1, 2, \dots$) aus, bis der Fehler (bzw. für das Sekantenverfahren $|x_i - x_{i-1}|$) $\leq 10^{-9}$ ist. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

b) Wählen Sie für die obige Funktion $x_1 = 6$ und $x_2 = 7$ und iterieren Sie mit dem ursprünglichen Sekantenverfahren, bis $|x_i - x_{i-1}| \leq 10^{-9}$. Drucken Sie die Werte von i und x_i aus.

76) Welche Nullstelle von $\sin x$ wird mit dem Sekantenbisektionsverfahren `secbis` mit $x_1 = 1$ und $x_2 = 8$ gefunden?

77) Führen Sie für die Funktionen $f_1(x) = x^4 - 7x^2 + 2x + 2$ und $f_2(x) = x^2 - 1999x + 1000000$ sechs Schritte des Newton-Verfahrens durch, wobei für $f_1(x)$ der Startwert $x_0 = 3$ und für $f_2(x)$ der Startwert $x_0 = 365$ gewählt werden soll. Interpretieren Sie die Ergebnisse.