1. Man bestimme $\limsup_{n\to\infty}$, $\liminf_{n\to\infty}$, sup und inf von

$$\{(-1)^n \frac{n^2}{2n^2-1}\}\ ,\ \{(-1)^n + \frac{n^2}{2n^2-1}\}.$$

2. Man bestimme $\limsup_{n\to\infty}$, $\liminf_{n\to\infty}$ der Folgen:

$$a_n = \begin{cases} 1/n & : \quad n \equiv 0 \bmod 2 \\ 1 & : \quad n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} (1+1/n)^n & : \quad n \equiv 0 \bmod 2 \\ (1+1/n)^{n+1} & : \quad n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 1+1/2^n & : \quad n \equiv 0 \bmod 3 \\ 2+(n+1)/n & : \quad n \equiv 1 \bmod 3 \\ 2 & : \quad n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

3. Man bestimme alle Häufungspunkte der Menge $\{i^n\ \frac{n}{n+1}\}$ in $\mathbb{C}$ und gebe Teilfolgen an, die gegen die einzelnen Häufungspunkte konvergieren.

4. Berechne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{1+1/n}\ ,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{2^n\, n^5}{3^n}\right).$$

5. Man zeige : die Teleskopreihen $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k-1})$ und $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k+1})$ sind genau dann konvergent, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n$ existiert. In diesem Falle ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} x_n - x_0 \quad \text{und} \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k+1}) = x_1 - \lim_{n\to\infty} x_n.$$

6. Man zeige, dass die folgenden Reihen die angegebenen Werte haben.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \frac{2}{3}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k} = \frac{4}{7}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

7. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $\{\alpha_k\}$ eine beschränkte Folge, so braucht $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a_k$ nicht mehr konvergent zu sein (Beispiel?). Man zeige : ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sogar absolut konvergent, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a_k$ auch absolut konvergent.

8. Welche der folgenden Reihen sind konvergent, welche divergent?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/k}}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^p},\ p \in \mathbb{N}.$$

9. Wie 8 für :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(\log k)^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^{1/k}}{k}.$$

10. Wie 8 für :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^4\, e^{-k^2}.$$

11. Show : the series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is absolutely convergent, if and only if the a_k's can be written in the form $a_k = b_k - c_k$, where $b_k, c_k \geq 0$ and the series $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ and $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ are convergent.

12. Man zeige : ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\{\alpha_k\}$ eine Nullfolge, so strebt $a_k\alpha_0 + a_{k-1}\alpha_1 + \ldots + a_0\alpha_k \to 0$. Hinweis : Cauchy-Produkt!

13. Man untersuche das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}, \qquad a_n = (n^{1/n} - 1)^n.$$

14. Welche der folgenden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sind absolut, welche bedingt konvergent?

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n \log n}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

15. Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)(n+2)}.$$

16. Wie Aufgabe 15 für :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\, z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}\, z^n.$$