Der rote Faden durch die Mathematik der AHS-Oberstufe

Ilse Fischer, Universität Wien

Brainstorming: Welche Schlagworte haben aus dem Mathematikunterricht überlebt?

Aus dem Lehrplan:

...

Mathematische Kompetenzen

Kompetenzen, die sich auf Kenntnisse beziehen:

Sie äußern sich im Vertrautsein mit mathematischen Inhalten aus den Bereichen Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik.

...

Was sind Zahlen ?

Inwiefern sind sie “nützlich” ?

Was ist Algebra ?

Inwiefern ist sie “nützlich” ?

Was ist Analysis ?

Inwiefern ist sie “nützlich” ?

Was ist Geometrie ?

Inwiefern ist sie nützlich ?

Was ist Stochastik ?

Inwiefern ist sie nützlich ?

Weitere Aufgaben!

- Einordnung der zu Beginn genannten Schlagworte in die fünf Teilgebiete.

- Einordnung der Überschriften in den Oberstufenbüchern in die fünf Teilgebiete.

Zahlen (Wikipedia)

Zahlen sind abstrakte mathematische Objekte, die Quantitäten (Anzahlen, Differenzen, Größenverhältnisse, ...) darstellen und unter anderem zum Zählen, Ordnen und Messen verwendet werden.

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ sind genau jene Zahlen, die eine "Dezimaldarstellung" besitzen.

Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$

Algebra (Prof. Altmann)

Grundlegend behandelt die Algebra die Lösung von polynomialen Gleichungssystemen. Weitergehend beinhaltet sie das Studium von Mengen mit zusätzlichen Strukturen.

Algebra (www.mathematik.de)

Ursprünglich befasste sich die Algebra mit dem Lösen algebraischer Gleichungen, d.h. der Bestimmung der Nullstellen von Polynomen mit rationalen oder ganzzahligen Koeffizienten. In diesem Zusammenhang mussten immer neue Möglichkeiten entwickelt werden, was unter anderem auch zur Einführung der imaginären Zahlen führte. Wenn man z.B. die Nullstellen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ bestimmen will, reichen die reellen Zahlen nicht mehr aus, da das Quadrat einer reellen Zahl immer positiv (oder Null) ist und man nie auf Null kommt, wenn man zu einer nicht-negativen Zahl eins addiert. Durch die Einführung der komplexen Zahlen, die sich aus reellen und imaginären Zahlen zusammensetzen, und der Hilfe der Analysis war es dann auch möglich den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Er besagt, dass in den komplexen Zahlen jede Gleichung in Linearfaktoren zerfällt, d.h. die Anzahl der Nullstellen mit dem Grad der Gleichung übereinstimmt. Auch versuchte man allgemeine Lösungen durch Radikale, was einfach verschachtelte Wurzelausdrücke sind, für Gleichungen zu finden. Jedem dürfte noch aus der Schule die pq-Formel ein Begriff sein, die einem eine Berechnungsvorschrift zum Lösen quadratischer Gleichungen liefert. Gleichartige Formeln wurden auch zum Lösen von Gleichungen dritten und vierten Grades gefunden. Eines der interessantesten Ergebnisse der Algebra jedoch ist es, dass es unmöglich ist allgemeine Lösungsformeln für Gleichungen höheren Grades (Grad > 4) zu finden.

Analysis (Lexikon der Mathematik)

Die Analysis ist ein Zweig der Mathematik, der sich mit der Untersuchung von Funktionen befasst. Sie enthält vor allem die graphische Darstellung von Funktionen, bestimmt Extremwerte, Steigungen, Schnittpunkte mit anderen Funktionskurven oder Flächen, die von Funktionskurven begrenzt sind.

Funktion (Wikipedia)

In der Mathematik ist eine Funktion oder Abbildung eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Eingangsgröße, Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) ein Element der anderen Menge (Ausgangsgröße, Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet.

Geometrie (Wikipedia)

Einerseits versteht man unter “Geometrie” die zwei- und dreidimensionale euklidische Elementargeometrie, die auch im Schulunterricht gelehrt wird und die sich mit Punkten, Geraden, Ebenen, Abständen, Winkeln etc. beschäftigt, sowie diejenigen Begriffsbildungen und Methoden, die im Zuge einer systematischen und mathematischen Behandlung dieses Themas entwickelt wurden.

Andererseits umfasst der Begriff “Geometrie” eine Reihe von großen Teilgebieten der Mathematik, deren Bezug zur Elementargeometrie für Laien nur mehr schwer erkennbar ist.

Stochastik

Die Stochastik hat die Aufgabe, zufällige Vorgänge mit Hilfe mathematischer Modelle zu beschreiben und Verfahren zu entwickeln, um daraus für die Praxis verwertbare Folgerungen zu ziehen. Sie gliedert sich in die Wahrscheinlichkeitstheorie und die mathematische Statistik.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie nahm ihren Anfang vor etwa 300 Jahren mit dem Wunsch, Zufallsmechanismen von Glücksspielen zu analysieren. Zu diesem Komplex gehören Würfelspiele, Kartenspiele, Roulette und ähnliches. Aus diesem Problemkreis ist der kombinatorische Teil der Wahrscheinlichkeitstheorie entstanden, bei dem zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten die Anzahl der „günstigen Fälle“ zur Anzahl der „möglichen Fälle“ in Verhältnis gesetzt wird.

Ein zentrales Gebiet der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie ist die Theorie der stochastischen Prozesse, die Modelle für den zeitlichen Ablauf zufälliger Vorgänge sind. Klassische Beispiele für die Anwendungsrelevanz stochastischer Prozesse sind etwa Warteschlangen (Telefonsysteme, Verkehr, ...) oder Verzweigungsprozesse (Wachstum biologischer Populationen, ...); moderne und derzeit hochaktuelle Beispiele sind Finanzmathematik (Diffusionsprozesse, Option Pricing, Hedging, ...) oder in der Biologie das Problem der zeitlichen Einordnung eines letzten gemeinsamen "Stammvaters" zweier heute existierender Spezies oder Individuen aufgrund von DNA-Übereinstimmungen.

In der mathematischen Statistik entwickelt man Verfahren zur Analyse statistischer Daten: aus der gemachten Beobachtung sollen Rückschlüsse auf gewisse Kerngrößen (Parameter, statistische Funktionale, ...) der unbekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung, die die Beobachtung erzeugt hat, gezogen werden.

Ein Streifzug durch die schulische Wahrscheinlichkeitsrechnung

Quelle: Kapitel 7 (Wahrscheinlichkeiten) und Kaptiel 8 (Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten) aus Mathematik Oberstufe 3, Bürger, Fischer, Malle, Kronfellner, Mühlgassner, Schlöglhofer.

Das Ziegenproblem

Bei einer Spielshow kann der Kandidat ein Auto gewinnen. Dem Spiel liegen die folgenden Regeln zugrunde. Ein Auto und zwei Ziegen werden zufällig auf drei Tore verteilt, die zu Beginn des Spiels verschlossen sind. Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt. Hat der Kandidat das Tor mit dem Auto gewählt, dann wählt die Moderatorin von den anderen beiden Toren eines zufällig aus und öffnet es. Hat der Kandidat ein Tor mit einer Ziege gewählt, dann öffnet die Moderatorin dasjenige der beiden anderen Tore, hinter dem die zweite Ziege steht. Die Moderatorin bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere ungeöffnete Tor zu wählen.

Wie soll der Kandidat sich entscheiden, um seine Gewinnchance (auf das Auto) zu maximieren?

Wahrscheinlichkeiten

Worte wie “Wahrscheinlichkeiten”, “wahrscheinlich” oder Ähnliche werden in der Umgangssprache relativ oft verwendet, z.B.: “Wenn wir eine österreichische Familie zufällig auswählen, wird sie wahrscheinlich Kinder haben.” Dadurch drückt man eine gewisse Erwartung aus. In der Mathematik versucht man, den Grad dieser Erwartung durch eine Zahl auszudrücken. Aber wie soll das geschehen ? Es gibt dafür leider keine allgemein gültige Methode. Wir werden jedoch in diesem Kapitel einige Methoden kennenlernen, die in vielen Fällen anwendbar sind.

1. Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil

Unsere erste Methode, eine Wahrscheinlichkeit durch eine Zahl auszudrücken, beruht auf folgender Idee: Wenn 7 Zehntel aller österreichischen Familien Kinder haben, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte österreichische Familie Kinder hat $\frac{7}{10}$.

Familien 1988 nach der Zahl der Kinder (in Hundert)

# K	Ö	B	K	NÖ	OÖ	S	St	T	V	W
0	6778	228	359	1318	1038	353	1020	413	198	1851
1	6722	223	477	1320	1096	398	1098	509	247	1356
2	4939	203	408	922	872	325	750	456	231	772
3	1704	71	150	311	333	125	301	164	103	146
≥ 4	729	16	56	133	193	51	97	83	53	45
# K in ≥ 4	3230	71	254	580	856	224	442	378	233	192
# F	20872	742	1449	4004	3533	1253	3266	1624	831	4170
# K	24943	914	1996	4677	4697	1647	3942	2291	1250	3529

Aufgabe. Für eine Meinungsumfrage werden aus allen Familien eines Bundeslandes zufällig Familien ausgewählt. Beantworten Sie folgende Fragen anhand der Tabelle:

- Erhält man in Salzburg eher eine Familie mit einem Kind oder eine Familie mit zwei Kindern ?

- Wo erhält man eher eine kinderlose Familie, in Kärnten oder im Burgenland ?

- Wo erhält man eher eine Familie mit mehr als einem Kind, in Tirol oder in Wien ?

Annahme: Auswahl ist zufällig – keine Familie wird bevorzugt oder benachteiligt!

Allgemein: Aus einer Menge G (Grundmenge) soll ein Element zufällig ausgewählt werden. Es geht darum, die Erwartung zu beschreiben, dass das Element einer bestimmten Teilmenge angehört.

D.h. eine Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für die Erwartung.

Ist G eine endlich Menge und $A \subseteq G$, dann setzen wir

$$\text{Relativer Anteil von A in G} = \frac{|A|}{|G|}.$$

Als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein aus G ausgewähltes Element zu A gehört, kann man den relativen Anteil von A in G nehmen. Wir schreiben:

$$P(\text{Das ausgewählte Element gehört zu A}) = \frac{|A|}{|G|}$$

In der obigen Aufgabe:

$$P(\text{Eine in Kärnten zufällig ausgewählte Familie ist kinderlos}) = \frac{35900}{144900} = 0.248$$

$$P(\text{Eine im Burgenland zufällig ausgewählte Familie ist kinderlos}) = \frac{22800}{74200} = 0.307$$

Aufgabe 1. Es wird nach einem Zufallsverfahren aus allen österreichischen Familien eine ausgewählt. Wie wahrscheinlich ist, dass sie in Westösterreich lebt ? Wie wahrscheinlich ist, dass sie in Wien lebt und mehr als ein Kind hat ?

Aufgabe 2. In welchem Bundesland ist der relative Anteil der kinderlosen Familien am kleinsten ? (Welchen Wahrscheinlichkeiten entspricht das ?)

Aufgabe 3. Aus der Menge aller Kinder wird in Österreich zufällig ein Kind ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind ein Einzelkind ist ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer kinderlosen Familie lebt ?

Eine letzte Aufgabe zur Tabelle:

Für ein Quizspiel wurde aus der Menge aller Familien zufällig eine ausgewählt.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie aus Wien kommt ?

- Wir haben erfahren, dass in der ausgewählten Familie drei Kinder leben. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Wien kommt?

Wahrscheinlichkeiten können vom Informationsstand abhängen. (Ziegenproblem!)

Zufällige Auswahl und gleiche Chancen

Bei allen bisher behandelten Auswahlvorgängen war es wichtig, dass jedes Element die gleiche Chance hat, ausgewählt zu werden. Diese Forderung ist aber nicht immer leicht zu erfüllen. So kann es etwa bei einer Meinungsumfrage leicht passieren, dass ungewollt Personen einer bestimmten Region, eines bestimmten Alters, bestimmter Berufsgruppen oder eines bestimmten Geschlechtes bevorzugt werden. Wenn man etwa eine Hausbefragung vormittags durchführt wird man (noch immer?) eher Hausfrauen antreffen. In vielen Fällen kann man nicht begründen, dass jedes Element die gleiche Chance hat. Man hält sich jedoch in solchen Fällen an den folgenden Grundsatz:

Gleiche Chance für jedes Element wird angenommmen, solang kein Grund vorliegt, etwas anderes anzunehmen.

Zufallsgeräte, Glücksspiele

Die Forderung, dass bei einer zufälligen Auswahl kein Element bevorzugt oder benachteiligt sein darf, ist bei manchen “Zufallsgeräten” recht gut erfüllbar, weshalb diese oft bei Glücksspielen verwendet werden. Sie dienen vielfach auch als “Standardmodell” für wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen. Im Folgenden stellen wir einige Beispiele vor.

Die Urne

In einer Urne befinden sich gewisse Elemente, z.B. Lose oder nummerierte Kugeln. Diese Elemente werden gut durchmischt, dann zieht eine Person ein Element heraus. Man kann auch Kugeln in eine sich drehende Trommel geben und eine Kugel durch einen Stift hochheben lassen, wie bei “6 aus 45”.

Wichtig ist in jedem Fall, dass alle Elemente in der Urne die gleiche physikalische Beschaffenheit haben (gleiche Form, gleiches Gewicht usw.), sodass keine Kugel bevorzugt oder benachteiligt ist.

Aufgabe. In einer Urne sind 1 rote, 5 weiße und 3 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit a) eine weiße, b) eine schwarze, c) eine rote Kugel zu ziehen ?

Der Würfel

Der Wurf eines Würfels kann als “zufällige Auswahl einer Augenzahl” aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aufgefasst werden.

Hat jede Augenzahl die gleiche Wahrscheinlichkeit ? Manchmal möchte man glauben, dass die Augenzahl 6 schwerer zu erhalten sei als die übrigen Augenzahlen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird jedoch angenommen, dass bei einem intakten Würfel jede Augenzahl gleich wahrscheinlich ist. Man kann das bis zu einem gewissen Grad mit der Symmetrie des Würfels argumentieren.

Aufgabe. Ein Würfel wird geworfen. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- P(Es fällt eine 6)
- P(Es fällt eine 1)
- P(Es fällt eine Augenzahl > 4)
- P(Es fällt eine gerade Augenzahl)
- P(Es fällt eine ungerade Augenzahl)
- P(Es fällt eine Primzahl)

Glücksrad

Ein Glücksrad besteht aus einer Scheibe, die in Sektoren eingeteilt ist, und einem Zeiger. Der Zeiger wird in Drehung versetzt und bleibt nach einiger Zeit irgendwo stehen. Als Wahrscheinlichkeit, dass er in einem bestimmten Sektor stehen bleibt, kann hier der relative Anteil der Sektorfläche an der gesamten Kreisfläche genommen werden. Wir nehmen im Folgenden an, dass der Zeiger nicht auf dem Trennstrich zwischen zwei Sektoren stehen bleibt. (In einem solchen Fall kann man vereinbaren, dass der Zeiger neuerlich gedreht wird oder etwa der im Uhrzeigersinn folgende Sektor zu zählen ist.)

Aufgabe. Wir gehen von einem Glücksrad aus, das aus 3 Sektoren A, B, C besteht. Der Sektor A ist ein Viertelkreis, die Sektoren B und C sind gleich groß. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten.

- P(Der Zeiger bleibt im Sektor A stehen)

- P(Der Zeiger bleibt im Sektor B stehen)

- P(Der Zeiger bleibt im Sektor C stehen)

- P(Der Zeiger bleibt im Sektor A oder C stehen)

Zufallsversuche, Ereignisse

Nun geht es um Sprechweisen.

Vorgänge wie das Werfen eines Würfels, einer Münze, Drehen eines Glücksradrates etc. nennt man Zufallsversuche, die möglichen Ergebnisse nennt man Versuchsausfälle.

Man interessiert sich nun für die Wahrscheinlichkeit, dass bestimmte Ereignisse eintreten.

Es sei G die Menge aller Versuchsausfälle und A die Menge derjenigen Versuchsausfälle, bei denen ein bestimmtes Ereignis E eintritt. Dann ist $P(E) = |A|/|G|$.

Das Ereignis E heisst sicheres Ereignis, wenn $P(E) = 1$ und E heisst unmögliches Ereignis, wenn $P(E) = 0$.

Aufgabe. Finden Sie ein sicheres Ereignis und ein unmögliches Ereignis beim Würfeln.

Zu jedem Ereignis E ist das sogenannte Gegenereignis jenes, das genau dann eintritt, wenn E nicht eintritt. Man bezeichnet es mit $\neg E$.

Aufgabe. Was sind die Gegenereignisse zu "Es tritt eine gerade Augenzahl beim Würfeln auf" und zu "Es tritt eine Augenzahl kleiner als 5 auf"?

Wie berechnet man die Gegenwahrscheinlichkeit ?

Satz. Ist E ein Ereignis, so gilt:

$$P(\neg E) = 1 - P(E)$$

"Beweis". Sei G die Menge aller Versuchsausfälle, A die Menge derjenigen Versuchsausfälle, in denen E eintritt und A' die Menge derjenigen Versuchsausfälle, in denen E nicht eintritt. Dann gilt

$$|A'| = |G| - |A|$$

und somit

$$P(\neg E) = \frac{|A'|}{|G|} = \frac{|G| - |A|}{|G|} = 1 - P(E).$$

2. Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit

Aufgabe. Wirft man einen Reißnagel, so gibt es zwei mögliche Versuchsausfälle:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Versuchsausfall eintritt?

Nach der bisherigen Theorie über die Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil, wäre man versucht zu sagen, dass

$$P(\perp) = P(\lambda) = \frac{1}{2}.$$

Aber...

Versuchsserie: $1 = \perp$ und $0 = \lambda$.

1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1
0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1
0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1
1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0
0 1 1 1 0 1 0 1 1 usw.

Relative Häufigkeit

Tritt ein Ereignis E unter n Versuchen einer Versuchsreihe k–mal ein, so nennt man den Quotienten

$$h_n(E) = \frac{k}{n}$$

die relative Häufigkeit des Ereignisses E unter diesen n Versuchen.

In der Aufgabe erhalten wir für $E = \{\perp\}$ folgende relative Häufigkeiten:

n	50	100	150	200	250	300
$h_n(E)$	0.740	0.730	0.733	0.725	0.732	0.730

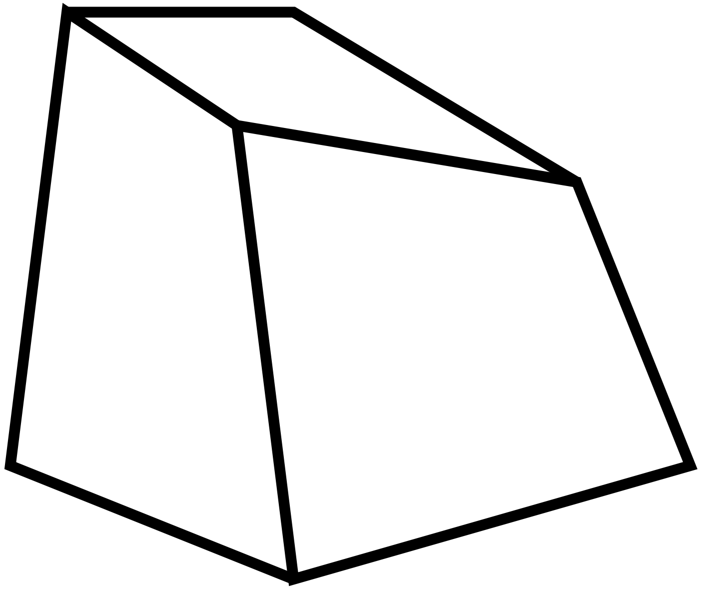
Angesichts dieses Versuchsergebnisses wird man wohl zu $P(E) = 0.73$ anstatt zu $P(E) = 0.5$ tendieren !?

Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit: Ein Zufallsversuch werde n-mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt (n groß). Als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses E kann man (mit einer gewissen Unsicherheit) die relative Häufigkeit von E unter diesen n Versuchen nehmen. Also:

$$P(E) = h_n(E)$$

Relativer Anteil versus relative Häufigkeit: Falls man in einen Konflikt zwischen einer Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil und einer Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit kommt, entscheidet man sich üblichweise für die zweite.

Ein Würfel, bei dem man nicht mit relativen Anteilen arbeiten wird:



Ist nicht symmetrisch! Genauso sind die beiden Versuchsausfälle bei einem Reißnagel auch nicht symmetrisch.

“Die Magie des Unendlichen”

Betrachtet man die Tabelle mit den relativen Häufigkeiten, so kriegt man den Eindruck, dass diese gegen einen “Grenzwert streben”. Vielleicht ist es sinnvoll diesen Grenzwert als Wahrscheinlichkeit zu definieren?

Problem! Man kann diesen Grenzwert gar nicht berechnen, da man einen Versuch nicht unendlich oft durchführen kann. In gewisser Weise ist dieser Grenzwert ein mathematisches Konstrukt und es lässt sich darüber streiten, ob er überhaupt existiert. Wieso das dann als Wahrscheinlichkeit definieren?

Andererseits: Eine neue Versuchsserie würde nicht unbedingt den gleichen Verlauf wie die erste haben. Grundsätzlich kann der Unterschied groß sein. Es ist aber eine immer wieder zu beobachtende Erfahrungstatsache, dass die relativen Häufigkeiten $h_n(E)$ in verschiedenen Versuchsserien bei großem n nicht sehr voneinander abweichen (Empirisches Gesetz der großen Zahlen).

3. Wahrscheinlichkeiten als subjektives Vertrauen

Nicht immer ist es möglich, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als relativen Anteil oder als relative Häufigkeit zu bestimmen. Was dann ?

Typisches Beispiel. Peter steht vor einem Tennismatch gegen einen Partner, gegen den er noch nie gespielt hat. Peter schätzt seine Gewinnwahrscheinlichkeit mit 0.6, sein Trainer nur mit 0.4.

... strenggenommen beginnt die Mathematik erst, wenn die Wahrscheinlichkeiten festgelegt sind.

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe. Herr Adam spielt an einem Automaten, bei dem man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gewinnt, und anschließend bei einem Automaten, bei dem man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ gewinnt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dass er a) bei beiden Automaten gewinnt, b) beim ersten Automaten gewinnt und beim zweiten verliert, c) beim ersten Automaten verliert und beim zweiten gewinnt d) bei beiden Automaten verliert.

Erweiterung. Herr Adam spielt anschließend noch bei einem dritten Automaten, bei dem man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{7}$ gewinnt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er a) bei allen drei Automaten gewinnt, b) bei den ersten beiden Automaten gewinnt und beim dritten verliert, c) bei allen drei Automaten verliert.

In der Aufgabe wurden Zufallsversuche betrachtet, die aus mehreren (zwei bzw. drei) Teilversuchen bestehen. Ein Ausfall des Versuches besteht aus einem Paar bzw. einem Tripel von Ausfällen der Teilversuche und entspricht einem Weg im Baumdiagramm.

Multiplikationsregel für die Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die Wahrscheinlichkeit eines einem Weg entsprechenden Versuchsausfall ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Weges.

(Ist das eine Annahme oder ein Resultat?)

Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen

Aufgabe. Eine Urne enthält 4 weiße und 3 schwarze Kugeln. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, der folgenden Ereignisse.

a) Alle Kugeln sind weiß.

b) Die ersten beiden Kugeln sind weiß, die dritte schwarz.

c) Die ersten beiden Kugeln sind schwarz und die dritte weiß.

d) Alle Kugeln sind schwarz.

Beantworte Sie die Fragen auch, wenn die Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Zusammenfassen von Versuchsausfällen

Aufgabe. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) bei beiden Würfen eine 6 kommt,

b) beim ersten Wurf eine 6 und beim zweiten Wurf keine 6 kommt,

c) beim ersten Wurf keine 6 und beim zweiten Wurf eine 6 kommt,

d) bei beiden Würfen keine 6 kommt,

e) beim ersten Wurf eine 6 kommt,

f) die Augensumme 6 beträgt ?

Addition von Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe. Wir haben eine Urne mit 4 weißen, 3 schwarzen und einer roten Kugel. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.

a) Beide Kugeln haben dieselbe Farbe.

b) Eine Kugel ist rot, eine weiß.

c) Die zweite Kugel ist schwarz.

d) Keine Kugel ist weiss.

e) Mindestens eine Kugel ist schwarz oder rot.

Es seien A, B zwei Ausfälle eines Zufallsereignisses, dann bezeichenen wir mit $A \cup B$ das Ereignis, das eintritt, wenn einer der beiden Ausfälle eintritt.

Additionsregel für Wahrscheinlichkeiten: Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeiten hängen vom Informationsstand ab!

Aufgabe. Die 628 Beschäftigten einer Firma verteilen sich gemäß der Tabelle auf die Gruppen Frauen/Männer bzw. RaucherInnen/NichtraucherInnen. Eine Person X wir zufällig ausgewählt. Berechnen Sie $P(X$ ist RaucherIn), $P(X$ ist RaucherIn) wenn man bereits weiß, dass eine Frau ausgewählt wurde bzw. $P(X$ ist RaucherIn) wenn man bereits weiß, dass ein Mann ausgewählt wurde.

	Frauen	Männer
RaucherInnen	201	169
NichtraucherInnen	98	140

Definition: Es seien E_1 und E_2 zwei Ereignisse eines Versuches. Die Wahrscheinlichkeit für E_1 unter der Voraussetzung, dass E_2 eintritt, nennt man bedingte Wahrscheinlichkeit von E_1 unter der Voraussetzung E_2 und bezeichnet sie mit $P(E_1|E_2)$.

Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung – oder: Wann wird addiert, wann multipliziert ?

Verknüpfungen: Es seien E_1 und E_2 zwei Ereignisse. Das Ereignis $E_1 \cap E_2$ tritt genau dann auf, wenn sowohl E_1 als auch E_2 auftritt. Das Ereignis $E_1 \cup E_2$ tritt genau dann auf, wenn mindestens eines der Ereignisse E_1 und E_2 auftritt.

Naheliegende Frage: Man kennt $P(E_1)$ und $P(E_2)$. Kann man daraus $P(E_1 \cap E_2)$ bzw. $P(E_1 \cup E_2)$ berechnen und wenn ja, wie geht das ?

Multiplikationsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Sind E_1, E_2 zwei Ereignisse eines Zufallsversuchs, dann gilt

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1).$$

"Beweis" mit relativen Häufigkeiten. Wir denken uns den Versuch n–mal durchgefürt (n sehr groß). Dabei trete das Ereignis E_1 bei m Versuchen ein, d.h. $P(E_1) = \frac{m}{n}$. Unter den m Versuchen, in denen E_1 eintritt, trete E_2 bei k Versuchen ein, d.h. $P(E_2|E_1) = \frac{k}{m}$. Beide Ereignisse treten dann insgesamt in k von n Versuchen ein, d.h. $P(E_1 \cap E_2) = \frac{k}{n}$. Damit ergibt sich:

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n}\frac{k}{m} = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \quad \square$$

Unabhängige Ereignisse

Man sagt, dass die Ereignisse E_1 und E_2 unabhängig sind, wenn $P(E_1|E_2) = P(E_1)$.

Im RaucherInnen-Beispiel würde das für $E_1 =$ "X ist RaucherIn" und $E_2 =$ "X ist Frau" bedeuten, dass die Wahrscheinlichkeit, dass man eineN RaucherIn wählt, unabhängig vom Geschlecht ist.

In dem Fall gilt $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$.

Additionsregel

Wissen: Sind A, B zwei Ausfälle eines Zufallsversuch, dann gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Naheliegende Frage: Wenn E_1, E_2 Ereignisse sind, gilt dann auch

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad ?$$

Aufgabe. Frau und Herr Adam spielen im Spielcasino Roulette. Wir betrachten die Ereignisse E_1 = “Herr Adam gewinnt” und E_2 = “Frau Adam gewinnt”. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest einer der beiden Ehepartner gewinnt, und überprüfen Sie, ob die Beziehung

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

erfüllt ist, falls a) Herr Adam auf die Transversale $\{1, 2, 3\}$ setzt und Frau Adam auf Passe (über 18), b) Herr Adam auf “ungerade” setzt und seine Frau wiederum auf Passe.

Lösung von a) Das Ereignis $E_1 \cup E_2$ tritt genau dann ein, wenn eine der Zahlen $1, 2, 3$ oder eine der Zahlen $19, 20, 21, \ldots, 36$ auftritt. Somit gilt

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{3 + 18}{37} = \frac{3}{37} + \frac{18}{37} = P(E_1) + P(E_2).$$

Lösung von b) Das Ereignis $E_1 \cup E_2$ tritt genau dann ein, wenn eine ungerade Zahl oder eine Zahl über 18 auftritt. Es gibt 9 ungerade Zahlen bis 18 und 18 Zahlen über 18. Somit gilt

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{9 + 18}{37} = \frac{27}{18}.$$

Es ist aber $P(E_1) = \frac{18}{37}$ und $P(E_2) = \frac{18}{37}$ und die Summe dieser beiden Zahlen ist nicht $\frac{27}{37}$.

Die Beziehung $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ gilt also nicht immer. Die Aufgabe lässt jedoch vermuten, dass diese Beziehung genau dann gilt, wenn die Ereignisse E_1 und E_2 nicht zugleich eintreten können.

Definition: Zwei Ereignisse eines Versuches heissen einander ausschließend, wenn es nicht möglich ist, dass beide zugleich eintreten.

Additionsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Sind E_1 und E_2 einander ausschließende Ereignisse desselben Versuchs, dann gilt:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Zurück zu den Ziegen

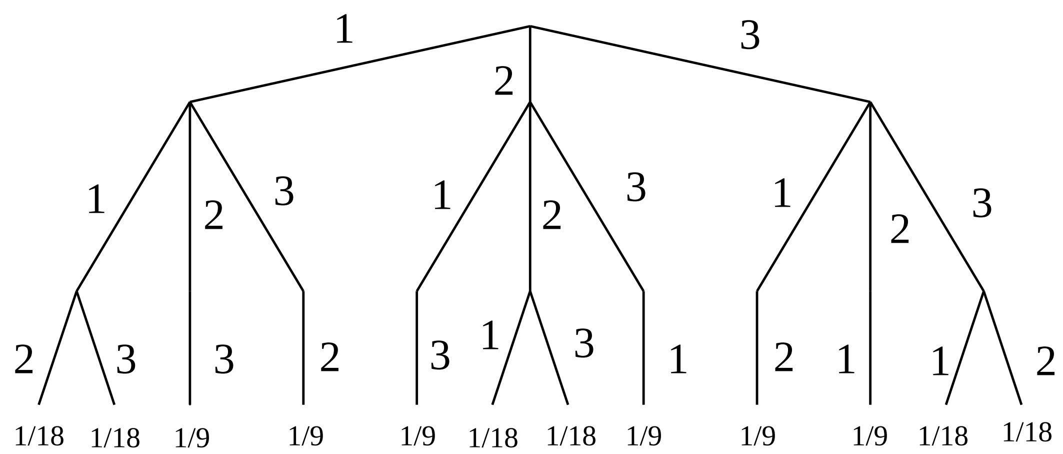
Mögliche Versuchsausfälle:

Auto hinter Tür	Kandidat wählt	Moderatorin wählt	Soll man wechseln
1	1	2	Nein
1	1	3	Nein
1	2	3	Ja
1	3	2	Ja
2	1	3	Ja
2	2	1	Nein
2	2	3	Nein
2	3	1	Ja
3	1	2	Ja
3	2	1	Ja
3	3	1	Nein
3	3	2	Nein

In der Hälfte der Fälle ist ein Wechsel besser.

Aber: nicht alle Versuchsausfälle gleich wahrscheinlich!

Baumdiagramm erweist sich als hilfreich: Wenn man die Tür wechselt, dann gewinnt man mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9}$!



Diskussion: der ideale Mathematikunterricht

Was soll unterrichtet werden ?

Wie soll unterrichtet werden (Frontalunterricht, “projektartiger” Unterricht, ...) ?

Was sollen die Ziele des Unterrichts sein ?

In welchem (Stunden–)Ausmaß soll Mathematik an der AHS unterrichtet werden ?

usw.