GRAPHEN MÜSSEN NICHT IMMER FUNKTIONEN DARSTELLEN

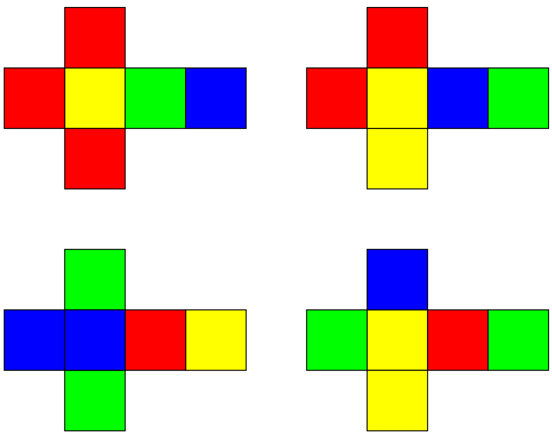
Ilse Fischer

Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstraße 15, A-1090 Wien, Austria.
E-mail: `Ilse.Fischer@univie.ac.at`

Zusammenfassung. In der Schulmathematik verbindet man mit dem Begriff des "Graphen" die graphische Darstellung einer Funktion. Dieser Begriff hat in der Mathematik allerdings noch eine zweite Bedeutung, nämlich als die graphische Darstellung von Netzwerken wie beispielsweise eines U-Bahnnetzes. Ich werde eine Einführung in diese andere "Graphentheorie" geben. Dabei werden wir unter anderem der Frage nachgehen, unter welchen Bedingungen es in einem Netzwerk möglich ist, eine Rundreise zu finden, bei der jede Verbindung zwischen zwei Netzwerkknoten genau einmal benutzt wird. Weiters werden wir uns mit dem Problem beschäftigen, wieviele Farben nötig sind, um die Länder einer Landkarte so zu färben, dass Länder mit einer gemeinsamen Grenze verschiedene Farben haben.

1. Einführendes Beispiel: Gefärbte Würfel

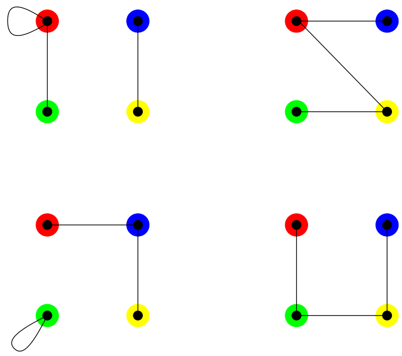
Folgendes Rätsel findet sich in [2]: Wir haben 4 Würfel vorgegeben, deren Seiten jeweils mit den Farben rot, blau, gelb und grün gefärbt sind. Diese Färbungen könnten beispielsweise wie folgt gewählt sein.



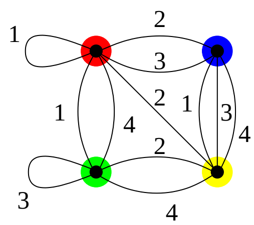
Date: 24. Februar 2009.

Die Aufgabe besteht nun darin, mit den Würfeln einen Turm zu bauen, sodass auf jeder der vier Seiten des Turms jede Farbe genau einmal vorkommt. Eine (uneffiziente) Methode dieses Problem zu lösen besteht nun sicherlich darin, dass man alle Möglichkeiten einfach durchprobiert.

Ein systematischerer Zugang ist wie folgt. Man speichert zunächst die essentiellen Informationen über die vier Würfel in sogenannten *Knoten-Kanten-Graphen*, wobei jedem Würfel ein eigener Graph zugeordnet wird. In unserem Beispiel sind das die folgenden vier Graphen.



Die *Knoten* der Graphen entsprechen den vier Farben und zwei Knoten werden mit einer *Kanten* verbunden, wenn die entsprechenden Farben auf gegenüberliegenden Seiten des jeweiligen Würfels sind. Nun verschmelzen wir die vier Graphen zu einem einzigen, wobei wir jeder Kante eine Zahl zuordnen, damit wir wissen, aus welchem Würfel die Kante hervorgegangen ist. In unserem Beispiel erhalten wir folgenden Verschmelzungsgraphen.



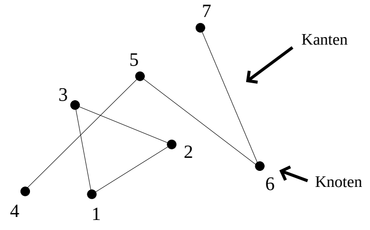
Wir werden nun sehen, dass unser Problem äquivalent dazu ist, dass wir zwei disjunkte Teilgraphen (d.h. keine Kante kommt in beiden Graphen vor) des Verschmelzungsgraphen finden, in denen von jedem Knoten genau zwei Kanten ausgehen und die je eine Kante mit den Nummern $1, 2, 3, 4$ enthalten. In unserem Beispiel führt folgende Zerlegung zu einer Lösung des Problems.

Dabei entspricht der erste Graph der Vorder- und Rückseite des Turms und der zweite Graph der linken und rechten Seite des Turms. Auf der Vorderseite haben wir das Rot des ersten Würfels, das Blau des zweiten Würfels, das Gelb des dritten Würfels und das Grün des vierten Würfels, auf der Rückseite das Rot des zweiten Würfels, das Blau des dritten Würfels, das Gelb des vierten Würfels und das Grün des ersten Würfels. Und, gemäß des zweiten Graphen, auf der rechten Seite des Turms, das Rot des dritten Würfels, das Blau des ersten Würfels, das Gelb des zweiten Würfels und das Grün des vierten Würfels, bzw. auf der linken Seite, das Rot des vierten Würfels, das Blau des dritten Würfels, das Gelb des ersten Würfels und das Grün des zweiten Würfels.

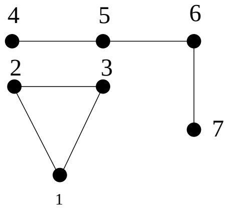
Aufgabe 1. Finde zwei Färbungen der 4 Würfel, für die das Problem lösbar ist und zwei Färbungen, für die das Problem unlösbar ist.

2. Definition eines Graphen

Ein *(Knoten-Kanten-)Graph* besteht aus *Knoten* und *Kanten*, wobei Kanten Verbindungen zwischen jeweils zwei Knoten sind. Ein Beispiel wäre etwa folgendes Gebilde.



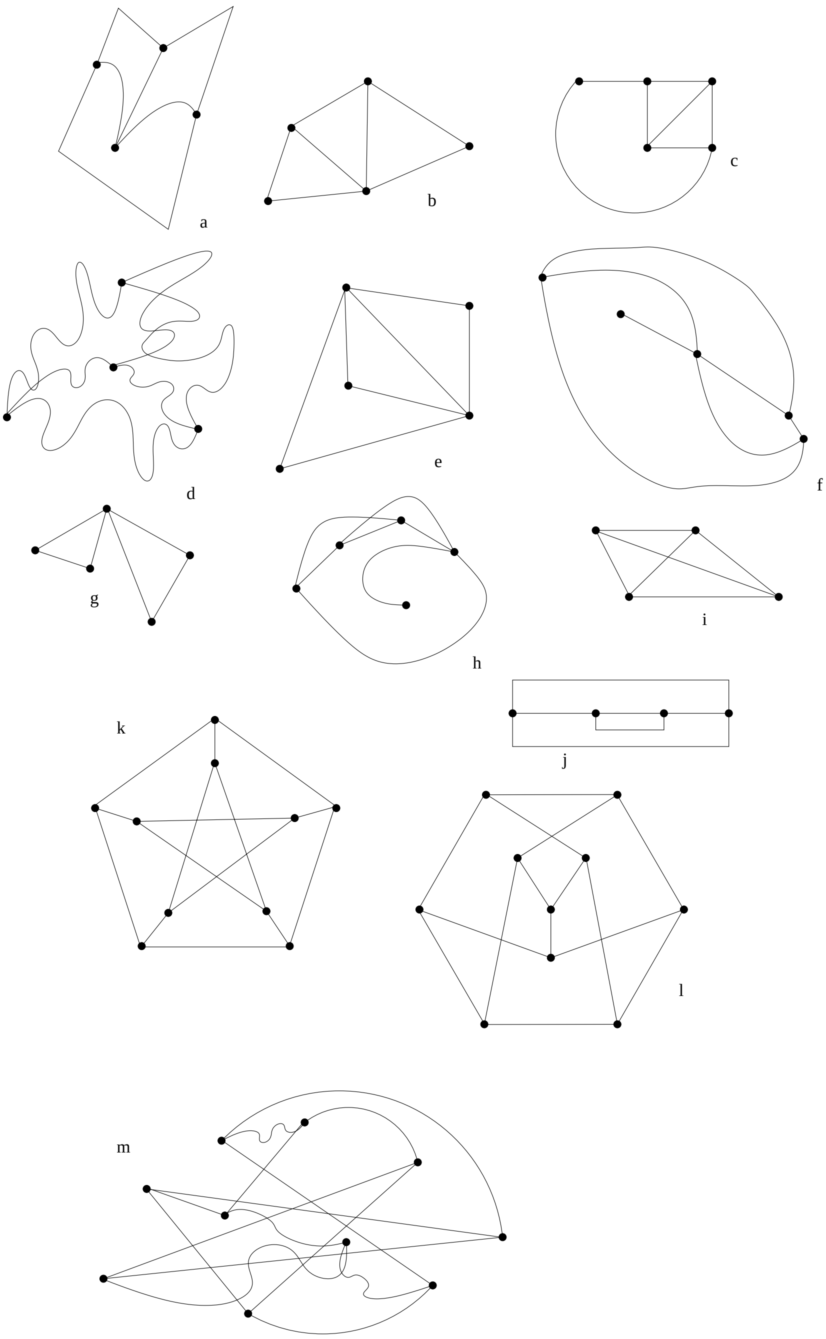
Dabei soll das Verschieben von Knoten und das Verzerren von Kanten erlaubt sein, d.h. obiger Graph ist derselbe wie folgender. (Man sagt, dass die beiden Graphen isomorph zueinander sind, streng genommen stimmen sie ja nicht wirklich überein.)



Im folgenden Paar, bestehend aus *Knotenmenge* und *Kantenmenge*, ist daher die vollständige Information über den Graphen codiert.

$$G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\})$$

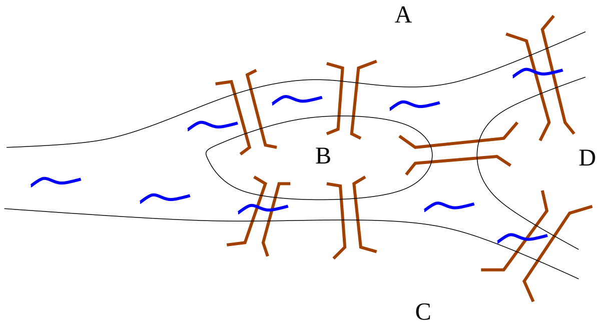
Aufgabe 2 [3]. Welche der folgenden Graphen sind zueinander isomorph?



3. Eulersche Graphen [1]

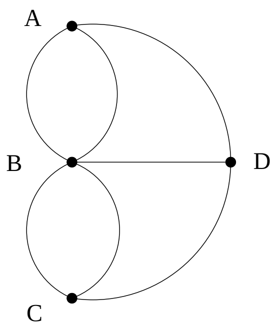
Historisch gesehen gehen Graphen unter anderem auf eine Arbeit des berühmten Schweizer Mathematikers *Leonhard Euler* (1707 – 1783) zurück. Euler wurde auf diese

Darstellungsmöglichkeit bei der Behandlung des sogenannten *Königsberger Brückenproblems* geführt. Die Stadt Königsberg (heute in Russland) breitete sich an den Ufern und auf zwei Inseln des Flusses Pregel aus. Die einzelnen Ortsteile wurden durch sieben Brücken wie folgt miteinander verbunden.



Das Problem: Ist es möglich, einen Rundgang durchzuführen, bei dem man jede Brücke genau einmal überquert und schliesslich wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

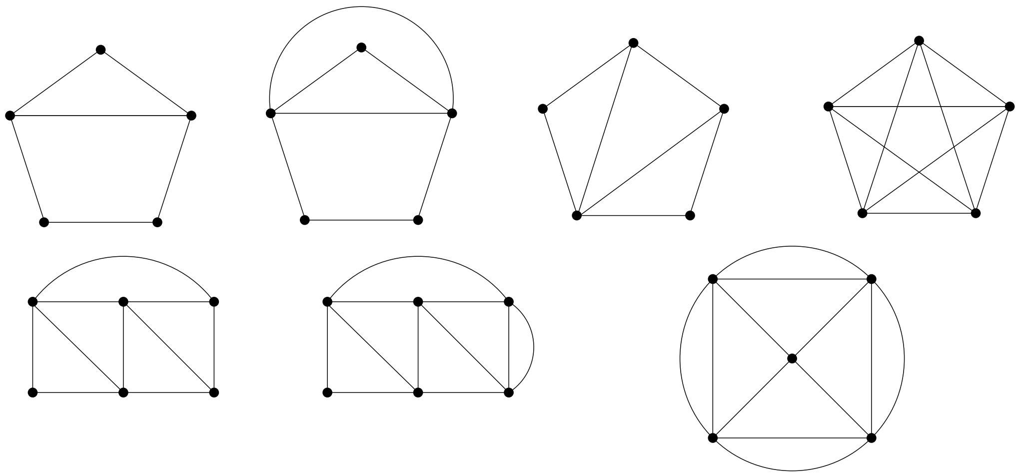
Man kann Königsberg schematisch darstellen, in dem man jedem Ortsteil einen Knoten zuordnet und für jede Brücke eine Kante zwischen den entsprechenden Knoten einzeichnet.



Das Problem lautet dann: Kann man die Kanten des entstehenden Graphen so durchlaufen, dass jede Kante genau einmal vorkommt und man schlussendlich wieder zum Anfangsknoten zurückkehrt? Eine derartige Kantenfolge wird *Eulerscher Kreis* genannt; ein Graph, der einen Eulersche Kreis besitzt, wird *Eulerscher Graph* genannt.

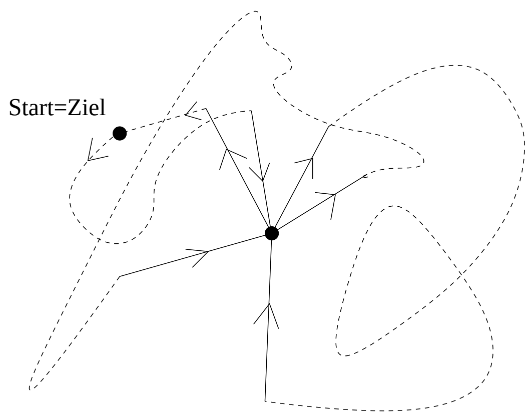
Aufgabe 3. Begründe, warum der dargestellte Graph keinen Eulerschen Kreis besitzt.

Aufgabe 4. Sind die folgenden Graphen Eulersch? Wenn ja, gib einen Eulerschen Kreis an! Wenn nein, begründe warum keiner existiert!



Aufgabe 5. Aus welchem Grund lassen sich Kantenmodelle eines Tetraeders und eines Würfels nicht aus einem Stück durchgehenden Draht erzeugen, wobei jede Kante nur aus einem einfachen Draht bestehen soll? Wieso ist dies bei einem Oktaeder schon möglich?

Damit ein Graph Eulersch ist, muss er natürlich *zusammenhängend* sein - das heisst, dass je zwei Knoten durch einen *Kantenzug* (das ist eine Folge benachbarter Kanten) verbunden sein müssen. Weiters ist es so, dass für jedes Auftreten eines Knotens in einem Eulerschen Kreis, eine Kante in den Knoten "hineinführen" muss und eine Kante aus dem Knoten "herausführen" muss. Insgesamt muss daher die Anzahl der Kanten an einem Knoten gerade sein, d.h. der *Knotengrad* eines jeden Knotens muss gerade sein. (Der Knotengrad ist die Anzahl der Kanten, die von dem entsprechenden Knoten ausgehen.)



Interessanterweise gilt auch die Umkehrung der obigen Aussage.

Satz. Ist ein Graph zusammenhängend und jeder Knotengrad gerade, dann besitzt er einen Eulerschen Kreis.

Diesen Satz wollen wir nun herleiten. Dazu müssen wir folgendes machen: Wir stellen uns vor, dass wir einen beliebigen zusammenhängenden Graphen vorliegen haben, in dem jeder Knotengrad gerade ist. Wir müssen einen geschlossenen Kantenzug konstruieren, in dem jede Kante genau einmal vorkommt. ("Geschlossen" bedeutet, dass Anfangs- und Endpunkt des Kantenzugs übereinstimmen.)

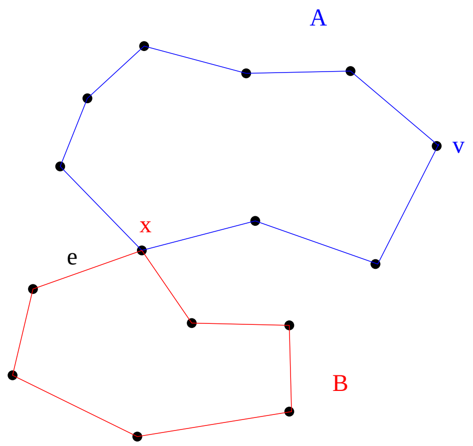
Dazu wählen wir zunächst eine beliebigen Knoten v und beginnen von dem aus mit einem Kantenzug. In diesem Kantenzug erlauben wir keine Kantenwiederholungen. Wir machen den Kantenzug so lange wie nur irgend möglich, d.h. wir fügen Kanten solange hinzu, bis wir zu einem Knoten w kommen, an dem jede Kante schon einmal benutzt wurde.

Aufgabe 6. Zeige, dass $v = w$ sein muss.

Wenn der gewählte Kantenzug, den wir mit A bezeichnen, bereits alle Kanten enthält, dann sind wir fertig. Andernfalls gibt es eine Kanten e, die noch nicht in dem Kantenzug vorgekommen ist.

Aufgabe 7. Überlege, warum man e so wählen kann, dass es einen Knoten x im Kantenzug A gibt, sodass die Kante e den Knoten x mit einem anderen Knoten verbindet. (*Hinweis:* Verwende, dass er Graph zusammenhängend ist.)

Nun wähle einen maximalen Kantenzug B, der in x beginnt, jedoch die Kanten in A vermeidet. Wiederum (wie Aufgabe 6) muss dieser maximale Kantenzug in x enden. Nun verschmelze die beiden Kantenzüge A und B wie folgt zu einem einzigen: Gehe in A von v nach x, dann durchlaufe B und gehe schliesslich den Rest von x nach v in A.

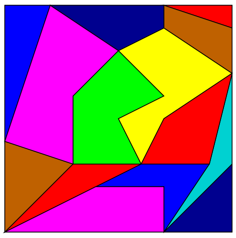


Dieser neue Kantenzug C erfasst insgesamt mehr Kanten als A. Er ist wiederum geschlossen und hat keine Kantenwiederholungen. Wenn er schon alle Kanten des Graphen enthält, dann ist er bereits ein Eulerscher Kreis und wir sind fertig. Andernfalls wiederholen wir die Prozedur.

Aufgabe 8. Warum kommt dieses Verfahren irgendwann zu einem Ende?

4. Färben von Landkarten

Um die Länder auf einer Landkarte besser unterscheiden zu können, ist es sinnvoll, diese mit verschiedenen Farben zu färben, sodass Länder mit einer gemeinsamen Grenze, verschiedene Farben haben.



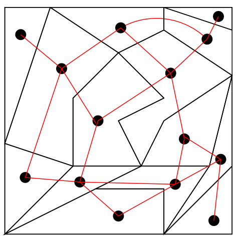
Nun stellt sich die Frage, wieviele Farben dazu mindestens nötig sind.

Aufgabe 9. Mit Hilfe einiger selbstkonstruierter Landkarten, erarbeite eine Vermutung bezüglich der minimalen Anzahl von Farben, die zum Färben von Landkarten nötig ist.

Aufgabe 10. Wie muss eine Landkarte beschaffen sein, bei der man mit zwei Farben auskommt?

Im Allgemeinen reichen vier Farben aus, um eine Landkarte in oben beschriebener Weise zulässig zu färben. Das zu zeigen ist allerdings schwer und ohne Hilfe von Computern noch immer nicht möglich. (Der erste Beweis stammt von Ken Appel und Wolfgang Haken aus dem Jahre 1977 und beruht auf Vorarbeiten von Heinrich Heesch.) Zu zeigen, dass fünf Farben immer ausreichen, ist allerdings nicht so schwer – das gehört zum Standardstoff einer Graphentheorievorlesung auf der Universität. Wir wollen nun aber den *Sechsfarbensatz* zeigen, d.h. wir wollen zeigen, dass sechs Farben ausreichen, um die Länder einer Landkarte zulässig zu färben.

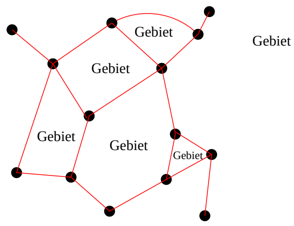
Dazu ist es einfacher, mit *Knotenfärbungen* zu arbeiten. Eine Knotenfärbung ist eine Färbung der Knoten eines Graphen, sodass zwei Knoten, die mit einer Kante verbunden sind, verschiedene Farben haben. Zeichnet man nun in einer Landkarte die Hauptstädte ein und verbindet man zwei Hauptstädte mit einer Kante, wenn die entsprechenden Länder eine gemeinsame Grenze haben, so sieht man, dass jeder zulässigen Färbung der Landkarte, eine zulässige Knotenfärbung des “Hauptstädtegraphen” entspricht. Und umgekehrt.



Ausserdem kann man beobachten, dass der "Hauptstädtegraph" die Eigenschaft hat, dass es keine Überkreuzungen der Kanten gibt; d.h. er ist ein sogenannter *planarer Graph*. Wir wollen daher folgenden Satz zeigen.

Satz. Jeder planare Graph besitzt eine Knotenfärbung, die mit maximal sechs Farben auskommt.

In planaren Graphen bezeichnet man minimale Zonen, die von einem geschlossenen Kantenzug umgeben sind, als *Gebiete* (Länder). Der äussere, unbeschränkte Bereich wird dabei als eigenes Gebiet gerechnet.



Aufgabe 11. Für ein paar selbstgewählte, planare zusammenhängende Graphen mache eine Tabelle, in der Du die Anzahl der Knoten, die Anzahl der Kanten und die Anzahl der Gebiet einträgst. Fällt Dir eine Gesetzmässigkeit auf?

Offenbar besteht folgender Zusammenhang.

Satz. In einem planaren zusammenhängenden Graphen sei n die Anzahl der Knoten, m die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Gebiete. Dann gilt

$$n - m + f = 2.$$

Um das zu zeigen, muss man zuerst sehen, dass ein zusammenhängender Graph mit n Knoten mindestens $n-1$ Kanten hat. Das machen wir in folgender Aufgabe.

Aufgabe 12. Zeige, dass ein zusammenhängender Graph mit n Knoten immer mindestens $n-1$ Kanten hat. (*Lösung:* Zunächst bemerken wir, dass ein Graph, der nicht zusammenhängend ist, in sogenannte *Zusammenhangskomponenten* zerfällt – das sind die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen. Wenn man nun in einem beliebigen Graphen eine Kante löscht, dann zerfällt die Zusammenhangskomponente, in dem sich die Kante befindet, entweder in zwei Teile oder sie bleibt erhalten. Mit anderen Worten: Das Löschen einer Kante erhöht die Anzahl der Zusammenhangskomponenten um maximal eins. Wenn wir in unserem zusammenhängende Graphen mit n Knoten der Reihe nach alle Kanten löschen, so landen wir schliesslich bei einem Graphen mit n Zusammenhangskomponente, für jeden Knoten eine. Weil wir mit nur einer Zusammenhangskomponente begonnen haben, müssen wir daher mindestens $n-1$ Kanten gelöscht haben.)

Als nächstes wollen wir verstehen, warum ein zusammenhängender Graph mit der soeben bestimmten Minimalanzahl von Kanten immer planar ist und zudem genau ein Gebiet hat.

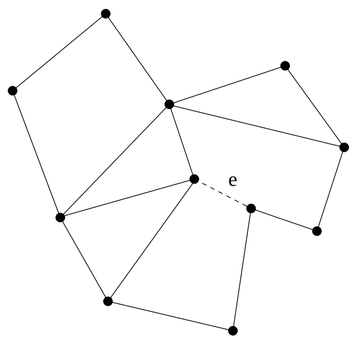
Aufgabe 13. Zeige, dass ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und $n-1$ Kanten planar ist und genau ein Gebiet hat. (*Lösung:* Siehe Lösung von Aufgabe 12. Überlege zunächst, dass das Löschen einer Kante dann und nur dann zur Erhöhung der Anzahl der Zusammenhangskomponenten führt, wenn sich die Kante in keinem Kreis befindet. Folge daraus, dass ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und $n-1$ Kanten keinen Kreis haben kann. Daher muss er planar sein (warum?) und zusätzlich zum Aussengebiet ist kein weiteres Gebiet möglich.)

Bemerkung: Solche Graphen wie in Aufgabe 13 nennt man in der Graphentheorie *Bäume*.

Damit wäre die Formel zunächst mal für den Fall $m = n-1$ gezeigt. Angenommen die Formel stimmt im Allgemeinen nicht, dann wählen wir ein Gegenbeispiel mit einer minimalen Anzahl von Kanten. Wir wissen bereits, dass in diesem Gegenbeispiel $m > n-1$ gelten muss.

Aufgabe 14. Ein Graph mit n Knoten und mehr als $n-1$ Kanten hat zumindest einen Kreis (= geschlossener Kantenzug). (*Lösung:* Siehe Lösungen von den Aufgaben 12 und 13. Hier muss beim sukzessiven Löschen der Kanten zumindest einmal der Fall eintreten, dass es zu keiner Erhöhung der Anzahl der Zusammenhangskomponenten kommt.)

Wir wissen daher, dass unser minimales Gegenbeispiel einen Kreis besitzen muss und wir wählen eine Kante e in diesem Kreis.



Die Kante e liegt am Rand zweier Gebiete. Löscht man die Kante, so verschmelzen die beiden Gebiete und man erhält einen Graphen mit n Knoten, $m-1$ Kanten und $f-1$ Gebieten. Wegen der Minimalität unseres Gegenbeispiels gilt die Formel für den Graphen, den wir so durch Löschen von e erhalten haben, d.h. es gilt

$$n - (m-1) + (f-1) = 2.$$

Die beiden 1er kürzen sich, daher gilt die Formel auch für unser minimales Gegenbeispiel und das ist ein Widerspruch. Wir haben also fälschlicherweise angenommen, dass ein Gegenbeispiel zur Formel existiert, also muss sie in Wirklichkeit für alle Graphen stimmen.

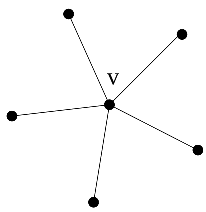
Im nächsten Schritt zeigen wir, dass in einem planaren Graphen mit n Knoten die Anzahl der Kanten maximal $3n - 6$ beträgt. Dazu folgende Ungleichung: In einem planaren Graphen mit m Kanten und f Gebieten gilt

$$3f \leq 2m.$$

Um das zu sehen, durchwandern wir die einzelnen Gebiete des Graphen, jedes Gebiet kommt genau einmal dran, und wir zählen in jedem Gebiet die Kanten, die es umgeben. Weil jedes Gebiet von mindestens 3 Kanten umgeben ist (wir schliessen Mehrfachkanten aus), ergibt unsere Zählung insgesamt mindestens $3f$ Kanten. Und weil jede Kante maximal am Rand zweier Gebiete liegt, erhalten wir höchstens $2m$ Kanten. Die Ungleichung folgt. Setzen wir die Ungleichung in die Eulersche Polyederformel ein, so erhalten wir $m \leq 3n - 6$, zumindest für zusammenhängende planare Graphen.

Aufgabe 15. Warum gilt die Abschätzung auch für planare Graphen, die nicht zusammenhängend sind.

Der letzte Vorbereitungsschritt für unseren Beweis des Sechsfarbensatz ist es, zu zeigen, dass ein planarer Graph immer einen Knoten hat, dessen Grad kleiner oder gleich 5 ist.



Um das zu zeigen, ist die folgende Aufgabe fundamental.

Aufgabe 16. Wenn man in einem Graphen alle Knotengrade aufsummiert, so erhält man die zweifache Kantenanzahl.

Mit S bezeichnen wir in unserem planaren Graphen die Summe aller Knotengrade. Wegen Aufgabe 16 und der Tatsache, dass die Anzahl der Kanten maximal $3n - 6$ beträgt, wissen wir, dass

$$S \leq 6n - 12.$$

(Die Anzahl der Knoten ist wie üblich n.)

Um nun zu zeigen, dass es mindestens einen Knoten gibt, dessen Grad kleiner oder gleich 5 ist, nehmen wir an, dass das nicht der Fall sei und führen das auf einen Widerspruch. Wir wissen dann, dass diese Situation nicht eintreten kann. Angenommen also, es gäbe keinen Knoten, dessen Grad kleiner oder gleich 5 ist. Daher haben alle Knoten

Grad 6 oder größer. Dann müsste aber die Summe der Knotengrade S zumindest $6n$ betragen, was im Widerspruch zur Tatsache steht, dass S maximal $6n - 12$ beträgt.

Es gibt daher einen Knoten v dessen Grad kleiner oder gleich 5 ist. Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um den Sechsfarbensatz zu zeigen:

Wenn der Graph 6 Knoten oder weniger hat, dann ist es klar, dass man mit 6 Farben auskommt.

Angenommen der Graph habe 7 Knoten. Dann gibt es einen Knoten v, dessen Grad maximal 5 ist. Wir löschen diesen Knoten mitsamt seiner Kanten und erhalten einen Graphen mit 6 Knoten. Von dem wissen wir schon, dass wir ihn mit 6 Farben färben können und wir fixieren eine solche Färbung. Nun geben wir den Knoten v mit seinen Kanten wieder dazu. Weil v maximal 5 Nachbarn hat, gibt es nun eine Farbe, die für v übrig geblieben ist.

Folglich sind alle planare Graphen mit maximal 7 Knoten mit 6 Farben färbbar. Wir betrachten nun planare Graphen mit 8 Knoten, finden dort wieder einen Knoten v, dessen Grad maximal 5 beträgt, löschen diesen, erhalten einen Graphen mit 7 Knoten, der folglich mit 6 Farben färbar ist. Nachdem wir gefärbt haben, fügen wir den Knoten v wieder hinzu; weil er maximal 5 Nachbarn hat, bleibt für den Knoten eine Farbe übrig und wir haben eine zulässige Färbung gefunden. Genauso verfahren wir bei Graphen mit $9, 10, 11, \ldots$ Knoten. Damit ist der Sechsfarbensatz gezeigt.

Literatur

[1] Heinrich Bürger, Roland Fischer, Günther Malle, Manfred Kronfellner, Thomas Mühlgassner und Franz Schlöglhofer, Mathematik Oberstufe 1, öbv & hpt, 2. Auflage (2000)

[2] J.H. van Lint und R.M. Wilson, A course in combinatorics, 2nd edition, Cambridge University Press, 2001.

[3] B. Lutz-Westphal, Unterrichtsmaterialien zu "Diskrete Mathematik für die Schule": Isomorphie von Graphen (2003), `http://www.math.tu-berlin.de/ westphal/projekt/materialien.html`